Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 8: *Sistemas de coordenadas; integrais de superfície*

---

1. Descreva, em coordenadas polares, os seguintes domínios de $\mathbb{R}^2$.

   (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$.

   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x \wedge x^2 + (y - 1)^2 \le 1\}$.

   (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\}$.

   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le |x| \wedge x^2 + y^2 \le 4\}$.

   (e) D é limitado pelas curvas de equação $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ e $y = 0$.

2. Descreva os seguintes sólidos em coordenadas cilíndricas.

   (a) Sólido delimitado pelas superfícies de equação $z = -18 + 2x^2 + 2y^2$ e $z = 9 - x^2 - y^2$.

   (b) Sólido delimitado pelas superfícies de equação $2z = x^2 + y^2$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (0 \le z \le 2 \wedge x^2 + y^2 \le 4) \vee (2 \le z \le 4 \wedge x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4)\}$.

   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \le 1 \wedge 0 \le x \le 4 - y^2 - z^2\}$.

3. Descreva os seguintes sólidos em coordenadas esféricas.

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$.

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \wedge z \ge \sqrt{3}\}$.

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \wedge x^2 + y^2 \le z^2\}$.

4. Determine a área da superfície parametrizada por

$$s(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, \pi].$$

5. Para as superfícies que se seguem, **i)** parametrize a superfície dada e **ii)** expresse a sua área em termos de um integral de superfície.

   (a) Superfície de equação $2z = x^2 + y^2$, interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (b) Superfície de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, *interior* ao cilindro $z \ge 0 \wedge x^2 + y^2 - ay = 0$, onde $a > 0$.

6. Expresse $\int\int_S f dS$ sendo

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $S : z = 2 - x^2 - y^2 \ge 0$.

   (b) $f(x, y, z) = 3z$ e $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2} \wedge a \le z \le b$, $(0 < a < b)$.

   (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ e $S : x = y^2 + z^2 \le 1$.

7. Para o campo vectorial $F(x, y, z) = (xy, x^2, x + z)$ e S a superfície plana dada por $2x + 2y + z = 6$, situada no 1^o octante,

   (a) Parametrize a superfície dada.

   (b) Determine $\int\int_S F \cdot \hat{n} dS$, onde $\hat{n}$ aponta "para a origem" do referencial.

8. Sejam $F(x, y, z) = (0, z, 2y)$ um campo vectorial e S a porção de superfície do parabolóide $y = 5 - x^2 - z^2$ delimitada pelo plano $y = 1$.

    (a) Parametrize a superfície dada.

    (b) Calcule o plano tangente à superfície no ponto $P = (1, 4, 0)$.

    (c) Determine $\int\int_S rotF \cdot \hat{n} dS$, supondo $\hat{n}$ aponta do *interior* para o *exterior*.