Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 7: *Diferenciação - teoremas do cálculo diferencial, aplicações e derivadas de ordem superior;*

---

1. Estude, quanto à diferenciabilidade, as funções que se seguem:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & x+y>0 \\ x+y, & x+y\leq 0 \end{cases}$,

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y}, & x^2+y\neq 0 \\ 0, & x^2+y=0 \end{cases}$,

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\frac{1}{x}) & se\ x\neq 0 \\ 0 & se\ x=0 \end{cases}$.

2. Uma chapa de metal, situada no plano XoY, é aquecida de tal modo que a sua temperatura $T = T(x,y)$ é inversamente proporcional à distância do ponto à origem.

   (a) Se a temperatura em $P = (3,4)$ é de 100^oC, determine a derivada direccional de T em P na direcção do vector $\vec{u} = (1,1)$.

   (b) Partindo de P, em que direcção a temperatura

      i. se mantém inalterada?

      ii. mais aumenta?

      iii. menos aumenta?

3. Um certo edifício tem a forma da metade superior do elipsóide $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{900} + \frac{z^2}{400} = 1$ (donde $z \geq 0$), sendo as dimensões dadas em metros.

   O edifício precisa de ser pintado e a tinta, após aplicação, produz uma camada com uma espessura de 0.005 m. Quantos metros cúbicos de tinta serão precisos?

   Sugestão: note que o volume de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ e $z \geq 0$ é dado por $\frac{2}{3}\pi abc$ e o aumento de volume devido à tinta corresponde a tomar os semi-eixos do elipsóide aumentados do valor da espessura da tinta.

4. Determine o plano tangente à superfície no ponto indicado:

   (a) $S : z = 2 - (x^2 + y^2)$, no ponto $P = (1,0,1)$.

   (b) $S : x^3 - 3y^2 + z^2 + 10 = 0$, no ponto $P = (1,-2,1)$.

   (c) $S : x + y + z - e^{xyz} = 0$, no ponto $P = (0,1/2,1/2)$.

5. Sejam $\Psi(x,y,z) = xy+z$ um campo escalar e $v(x,y,z) = (x,y,z)$ o campo vectorial *identidade*.

   (a) Determine o campo vectorial $f = (f_1, f_2, f_3)$ onde $f_1 = v \cdot v$, $f_2 = v \cdot (1,1,0)$ e $f_3 = f_1 \cdot f_2$.

   (b) Calcule $\nabla(\Psi \circ f)(1,1,1)$.

6. Para as seguintes funções compostas, calcule

   (a) $\frac{dF}{dt}$, onde $F(t) = f(\cos t, \sin t)$, com $f(x,y) = e^{xy}\cos(xy^2)$.

(b) $D(f \circ r)(\pi/4+1, \pi/4-1)$, onde $f(x,y) = \sin^2(2x) + \ln(y^2-1)$ e $r(u,v) = (u+v, u-v)$.

(c) $\nabla f(x,y)$ sendo $f(x,y) = \sin x + \varphi(\sin x - \sin y)$, com φ uma função real de variável real de classe C^1.

(d) $D(g \circ f)(0,0)$, sendo $f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$ e $g(u,v,w) = (wu^w, \sin(v+w))$.

7. Para

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases},$$

mostre que as derivadas mistas existem, mas não são iguais. Justifique.

8. Calcule as derivadas de 2^a ordem de

(a) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4 + \sin(xyz)$.

(b) $f(x,y) = e^{2x} g(\frac{x}{y})$, sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

(c) $f(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2+1)$.

9. Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2, e considerando o vector gradiente (formal) $\bigtriangledown = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, mostre que

(a) $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times F) = 0$;

(b) $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown f) = \Delta f$;

(c) $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times F) = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot F) + \Delta^2 F$;

(d) $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown f) = 0$;