Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 6: *Diferenciação - derivadas segundo um vector, gradiente e diferenciabilidade*

---

1. Calcule, se existir, a derivada de f segundo o vector $\vec{v}$ no ponto P indicado, onde

   (a) $f(x,y) = x^2 - 4y, \vec{v} = (1/2, \sqrt{3}/2), P = (-2, 2;)$

   (b) $f(x,y) = \frac{\sin y}{\cos x}, \vec{v} = (-3, 1), P = (\pi/4, \pi/4);$

   (c) $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2) + z, \vec{v} = (1, 1, -1), P = (0, 0, 3);$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi[, P = (0,0);$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \vec{v} = (1, 2), P = (0,0);$

   (f) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \vec{v} = (0, 3), P = (0,0).$

2. Determine, se possível, as derivadas parciais de 1^a ordem de f na origem, onde

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases};$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

3. Mostre que existe $D_{\vec{v}}f(0,0)$ segundo qualquer direcção $\vec{v} \neq \vec{0}$, mas que f não é contínua na origem, sendo

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2 \wedge x \neq 0 \\ 0, & \textit{restantes pontos} \end{cases}.$$

4. Mostre que existe o gradiente de f na origem, mas que não existe $D_{\vec{v}}f(0,0)$ segundo qualquer direcção $\vec{v} \neq \vec{0}$ que não seja paralela aos eixos, sendo

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases};$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3+x^3y}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

5. Determine o gradiente de f, onde

   (a) $f(x,y) = x^2\sin(x+y);$

   (b) $f(x,y,z) = \ln(x+y^2) + z^2.$

6. Determine Df, a matriz das 1^{as} derivadas de f, onde

   (a) $f(x,y) = (x^2\sin(x+y), \arctan(y/x), \ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}));$

   (b) $f(x,y,z) = (x^{y^2+z}, xy^2z^3\ln(x^2+z^2)).$

7. Estude a diferenciabilidade de f no ponto indicado, sendo

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, P = (0,0);$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, P = (0,0);$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, P = (0,0);$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x^3y^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}, P = (0,0).$

8. Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, e considerando o vector gradiente (formal) $\bigtriangledown = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, mostre que

(a) $\bigtriangledown \cdot (fF) = (\bigtriangledown f) \cdot F + f(\bigtriangledown \cdot F)$;

(b) $\bigtriangledown \times (fF) = (\bigtriangledown f) \times F + f(\bigtriangledown \times F)$.