Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 5: *Integrais curvilíneos e suas aplicações*

---

1. Calcule os seguintes integrais de linha (relativamente ao comprimento de arco)
   (a) $\int_r xds$, onde $r(t) = (t, t^2),\ t \in [0, 1]$.
   (b) $\int_r (x^2 + y^2)ds$, onde $r(t) = (\sin(3t), \cos(3t), 4t),\ t \in [0, \pi]$.
   (c) $\int_r e^{\sqrt{z}}ds$, onde $r(t) = (1, 2, t^2),\ t \in [0, 1]$.
   (d) $\int_r \frac{x+y}{y+z}ds$, onde $r(t) = (t, \frac{2t^{3/2}}{3}, t),\ t \in [1, 2]$.
   (e) $\int_r (2x - y)ds$, onde $x(t) = y(t) = t^4$, com $|t| \leq 1$.
2. Sejam $f(x, y, z) = y$ e $r(t) = (0, 0, t)$; mostre que $\int_r fds = 0$.
3. Calcule o integral relativamente ao comprimento de arco $\int_\Gamma f(x, y)ds$ onde
   (a) $f(x, y) = y$ e Γ é o segmento de recta que une $(1, 1)$ a $(2, 3)$.
   (b) $f(x, y) = xy$ e Γ é a curva de equação $|x| + |y| = 4$.
4. Determine a área da chapa sinusoidal de base parametrizada por $r(t) = (t, \sin(t)), t \in [0, 6\pi]$, e altura $z = x - 9$.
5. A média de um campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sobre uma curva rectificável $\Gamma \subset D$ é dada por
$$M_{campo\ escalar} = \frac{\int_\Gamma fds}{s(\Gamma)}.$$
   (a) Determine a média da ordenada da semi-circunferência Γ parametrizada por $r(t) = (0, a\sin t, a\cos t), t \in [0, \pi], a > 0$.
   (b) Determine a média da ordenada da semi-circunferência Γ parametrizada por $r(t) = (0, a\sin t, a\cos t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a > 0$.
   (c) Determine a média da cota da curva Γ parametrizada por $r(t) = (1, 1, 1) + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) + \frac{\sin t}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), t \in [0, 2\pi]$.
6. Calcule o integral curvilíneo $\int_r (x, y, z) \cdot dr$ onde
   (a) $r(t) = (t, t, t), t \in [0, 1]$.
   (b) $r(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0, 1]$.
   (c) $r(t) = (\sin t, 0, \cos t), t \in [0, 2\pi]$.
   (d) $r(t) = (t^2, 3t, 2t^3), t \in [-1, 2]$.
7. Calcule
   (a) $\int_r xdy$ onde $r(t) = (e^t, 1), t \in [0, 1]$.
   (b) $\int_r xdy - ydx$ onde $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.
   (c) $\int_r xdx + ydy$ onde $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

8. Calcule o integral de linha

$$I = \int_C (x - z)dx - xzdy + y^2 dz,$$

sendo C a curva de orientação positiva, dada pela intersecção do cilíndro $x^2+y^2 = 4$ com o plano $z = 3$.

9. Considere o campo vectorial f, que representa a força exercida sobre uma dada partícula situada no espaço. Calcule o trabalho realizado por f quando a partícula se desloca sobre a curva parametrizada por r:

   (a) $f(x, y) = (y, -x)$ e $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$.

   (b) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ e $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$ e $r(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0, 1]$.

10. Suponha que $r : [a, b] \subset \mathbb{R}^3, (a < b)$, é um caminho suave e que f é um campo vectorial contínuo, tal que $r([a, b])$ está contido no domínio de f. Mostre que, se $f(r(t)) \perp r'(t)$, então $\int_r f \cdot dr = 0$.