Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 4: *Integrais duplos e triplos*

---

1. Para os seguintes domínios de integração e funções integrandas, determine, se existir, $\int\int_R f(x,y)dxdy$.

   (a) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3, \quad R = [0,1]^2.$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{y} + x - 3y^2, \quad R = [0,1] \times [0,2].$

   (c) $f(x,y) = \sin^2(x)\sin^2(y), \quad R = [0,\pi/2]^2.$

   (d) $f(x,y) = y^{-3}e^{tx/y}, \quad R = [0,t] \times [1,t], t > 1.$

2. Mostre que, se existirem os integrais simples $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_c^d g(y)dy$, então existe o integral duplo $\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy$ e tem-se

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right),$$

   onde $a < b,\ c < d$.

3. Esboce o domínio de integração D indicado e expresse o valor da sua área por intermédio de um integral duplo.

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \wedge y \leq 1 - x^2\}.$

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x \wedge y + 6x - 8 \leq 0 \wedge y^2 \leq 8x\}.$

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq R \wedge y^2 + (x-R)^2 \leq R^2\}$, onde $R > 0$.

   (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-R)^2 \leq R^2 \wedge y \geq x\}$, onde $R > 0$.

   (e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq |y| \leq 1\}.$

   (f) sendo D o domínio delimitado pelas curvas de equação $xy = 3$, $2y = x$, $y = 2x$, $x = 0$ e $x = 2$.

4. Esboce o domínio de integração D indicado e calcule, se possível, o integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$.

   (a) $f(x,y) = 1 - x - y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1\}.$

   (b) $f(x,y) = e^{y^3}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2 \wedge 0 \leq y \leq 1\}.$

   (c) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 2 \wedge xy \geq 1\}.$

5. Esboce o domínio de integração dos seguintes integrais e inverta, se possível, a ordem de integração destes.

   (a) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx.$

   (b) $\int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^1 f(x,y)dx.$

6. Expresse o volume do sólido V por intermédio de integração tripla, sendo:

   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, com $R > 0$.

   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge 1 \leq z \leq 2\}.$

   (c) V limitado pelas superfícies de equação $z = x^2 + y^2$ e $4(z-1) = x^2 + y^2$.

(d) V a porção do 1^o octante limitada pelo plano $2x + y + 2z = 2$.

7. Esboce o domínio de integração do seguinte integral triplo

$$I = \int_0^3 dz \int_0^{6-z} dy \int_{-\sqrt{z/3}}^{\sqrt{z/3}} dx + \int_3^4 dz \int_0^{6-z} dy \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dx.$$