**Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro**

**ANÁLISE MATEMÁTICA III** **2010/11**

**Folha 3:** *Conceitos topológicos em* $\mathbb{R}^n$; *funções vectoriais de variável vectorial - domínio e limites*

---

1. Esboce os seguintes conjuntos e indique, para cada caso, qual o interior, a fronteira e o fecho, e se são fechados, abertos, etc..
   (a) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem $|x-3|+|y-1|<2$.
   (b) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem $y \geq x^2$.
   (c) o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ que satisfazem $\max\{|x-3|,|y|,z\}<2$.

2. Para as seguintes funções, determine o domínio de definição, bem como o interior e a fronteira deste.
   (a) $f(x,y)=\arcsin(2/x)+\sqrt{xy}$;
   (b) $f(x,y)=\frac{\sin y-\sin x}{y-x}$;
   (c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$;
   (d) $f(t,z)=(a\cos t, a\sin t, z),\ a>0$;

3. Sejam $f,g,h: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funções reais de variável vectorial. Considere um ponto de acumulação $a$ do domínio $D$. Mostre que
   (a) se $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $g$ é limitada, então tem-se $\lim_{x\to a}(gf)(x)=0$.
   (b) se $g(x)\leq f(x)\leq h(x), \forall x\in D$, então temos também
   $$\lim_{x\to a} g(x)\leq \lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} h(x),$$
   na condição destes limites existirem.

4. Para as seguintes funções de variável vectorial, verifique se existe o limite indicado.
   (a) $f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$ $(a\in\mathbb{R})$;
   (b) $f(x,y)=xe^{\arctan(y/x)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y)$ $(a\in\mathbb{R})$;
   (c) $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & x^2+y^2<2y \\ |x|, & x^2+y^2=2y \\ y^2, & x^2+y^2>2y \end{cases}$, $\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$;
   (d) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;
   (e) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;
   (f) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x^2-y)y}{x^4}, & 0<y<x^2 \\ 0 & ,\text{restantes pontos} \end{cases}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

5. Para as seguintes funções vectoriais de variável vectorial, determine o seu domínio de definição e verifique se existe o limite indicado.

   (a) $f(x,y) = (e^{x+y}, \sin(x+y), x^2\sin(1/x)), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y);$

   (b) $f(x,y) = (\frac{2xy^2}{x^2+y^2}, xy^2\cos(x^2+y^2)), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y);$

6. Relativamente à função $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, calcule os limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

   Que pode concluir acerca da existência do limite de $f$ em $(0,0)$?

7. Para as seguintes funções, calcule, se possível, os limites direccionais na origem.

   (a) $f(x,y) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(1-y)};$

   (b) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$

   (c) $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2};$

   (d) $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2};$