Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 11: *Extremos*

---

1. Encontre os extremos locais da função
   (a) $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y$.
   (b) $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y$.
   (c) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y$.
   (d) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$.
   (e) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.
   (f) $f(x, y) = \sin x + \cos y$.
   (g) $f(x, y) = e^{2x} \cos y$.

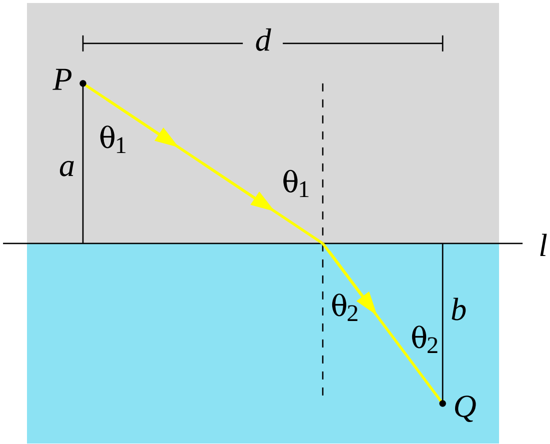
2. Determine o ponto da superfície $z = f(x, y)$ dada que está mais perto do ponto indicado, sendo
   (a) $z = x - y + 1, P = (0, 0, 0)$.
   (b) $z = x + y, P = (2, 2, 1)$.

3. Determine os extremos absolutos das seguintes funções f nos domínios D indicados:
   (a) $f(x, y) = xy(3 - x - y), D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ x + y \leq 3\}$.
   (b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y, D = [0, 1] \times [0, 2]$.
   (c) $f(x, y) = x + y, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ x + y \geq 1\}$.
   (d) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \geq -1\}$.

4. É possível aplicar as técnicas introduzidas em AM3 à resolução do seguinte problema: "determine as dimensões de uma caixa em forma de um paralelepípedo rectângular com $1dm^3$ de volume com a menor área possível de superfície"? Justifique a sua resposta.

5. Determine, nas alíneas seguintes, os extremos absolutos da função f sujeita à(s) condição(ões) dada(s):
   (a) $f(x, y) = x - 2y$, sujeita a $x^2 + y^2 = 25$.
   (b) $f(x, y) = x^4 + y^2$, sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.
   (c) $f(x, y) = \sin(xy)$, sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.
   (d) $f(x, y, z) = xyz$, sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $xy + yz + zx = 1$.
   (e) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, sujeita a $x - y + z = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$.

6. A *lei da refracção da luz* baseia-se no princípio físico de que esta se desloca sempre de modo a gastar o menor tempo possível no seu percurso, propagando-se a uma velocidade constante num meio homogéneo. Como consequência, o princípio estabelece que a luz se desloca em linha recta num meio homogéneo.



A figura ao lado representa, esquematicamente, o percurso de um raio de luz desde o ponto P até ao ponto Q, que atravessa uma recta l que separa dois meios homogéneos com diferentes densidades. Sejam v_1 a velocidade de propagação no meio que contém P e v_2 a correspondente velocidade no meio que contém Q. Designe-se por θ_1 e θ_2 os ângulos de incidência e de refracção, respectivamente.

Mostre que, se aplicarmos o método dos multiplicadores de Lagrange ao problema de minimização do tempo gasto pela luz na deslocação desde o ponto P até ao ponto Q, em função de θ_1 e θ_2, o(s) ponto(s) crítico(s) (θ_1, θ_2) obtido(s) obedecem à Lei de Snell:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

Tenha em atenção que a, b e d são constantes.