Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 10: *Campos conservativos. Teoremas fundamentais.*

---

1. Um campo vectorial f diz-se *conservativo* se e só se existir uma campo escalar Φ tal que $f = \nabla\varphi$.

   (a) Mostre que os seguintes campos vectoriais são conservativos, e determine o campo escalar associado.

      i. $f(x,y) = (-y\sin(xy), -x\sin(xy))$.

      ii. $f(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

      iii. $f(x,y,z) = (2x, z, y)$.

   (b) Determine o integral curvilíneo de f segundo uma curva C, de classe C^1, que une A a B, sendo

      i. $f(x,y) = (-y\sin(xy), -x\sin(xy))$, com $A = (0,1)$ a $B = (\pi, 1)$.

      ii. $f(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$, com $A = (0,1)$ a $B = (3,4)$.

      iii. $f(x,y,z) = (2x, z, y)$, com $A = (1,1,1)$ a $B = (2,3,1)$.

2. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x,y) = (y+3x, x+2y)$ para transportar uma partícula ao longo da elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido directo, do ponto $P_1 = (0,2)$ para $P_2 = (0,-2)$.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x,y) = (x^2, y^2)$ para transportar uma partícula ao longo da curva $|x|+|y| = 1$, percorrida no sentido directo.

4. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ do interior para o exterior do sólido definido por

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2.$$

5. Calcule a circulação do campo vectorial f ao longo da curva Γ, orientada positivamente, onde

   (a) $f(x,y) = (y, -x), \quad \Gamma : x^2 + y^2 = 1$.

   (b) $f(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}), \quad \Gamma : x^2 + y^2 = 1$.

6. Sendo S a superfície definida por $z = 5 - x^2 - y^2$, limitada por $z = 1$, e F o campo vectorial $F(x,y,z) = (0, z, 2y)$, calcule

   (a) $\int\int_S rotF \cdot \hat{n} dS$ (assuma a superfície orientada do *interior* para o *exterior*).

   (b) Calcule a circulação de F sobre a curva (orientada positivamente) em que S se apoia.

7. Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (-2x, -y, z)$ do *interior* para o *exterior* da superfície $y^2 + z^2 = 1$, limitada entre $x = 0$ e $x = 1$.

8. Considere a porção de superfície S definida por $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$, com $z \geq 2$, e o campo vectorial $F(x,y,z) = (0, x^2, 1)$.

(a) calcule a circulação de F sobre a curva Γ (positivamente orientada) em que S se apoia.

(b) calcule o fluxo de F ao longo da superfície S, sendo S orientada do *interior* para o *exterior*.

9. Seja U um campo escalar de classe C^2.

   (a) Mostre que se tem $\Delta U = \bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown U)$.

   (b) Sendo U tal que $U(x,y,z) = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, com u uma função real de variável real também de classe C^2, mostre que

   $$\int\int\int_V \Delta U dxdydz = 4\pi(b^2u'(b) - a^2u'(a)),$$

   onde V é o sólido definido pelas inequações $a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$.

10. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo $F(x,y,z) = (0, x^2, 1)$ através da semi-superfície esférica S orientada do seu *interior* para o *exterior*, onde

    $$S : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \quad \wedge \quad z \leq 2.$$

11. Suponha V o cubo de lado 1, situado no 1^o octante, de faces paralelas aos planos coordenados e tendo $(0,0,0)$ como um dos vértices.

    Use o Teorema de Gauss para calcular o integral de superfície $\int\int_{\partial V} F \cdot \hat{n}_{ext} dS$, onde

    $$F(x,y,z) = (x^2 + e^{y^2+z^2}, y^2 + x^2z^2, z^2 - e^y)$$

    é um campo vectorial e $\hat{n}_{ext}$ representa a normal unitária que aponta para o exterior do cubo.