Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

Folha 1: *Curvas*

---

1. Para as funções dadas abaixo, *i*) determine o domínio de r, bem como os pontos do domínio para os quais r é contínua; *ii*) calcule r' e r''.
   (a) $r(t) = (\ln t, e^{-3t}, t^2)$.
   (b) $r(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{2-t})$.
   (c) $r(t) = (\frac{1}{t}, \sin 3t)$.
   (d) $r(t) = (\ln(1-t), \sin t, t^2)$.
   (e) $r(t) = (2\sec t, 3\tan t)$.

2. Seja $r(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in [a, b]$, uma parametrização de uma curva Γ. Mostre que
   (a) o mesmo sucede com $r_k(t) = (f(tk), g(tk)), \ \ t \in [a/k, b/k]$, qualquer que seja $k > 0$.
   (b) a lei $s(t) = (f(-t), g(-t)), \ \ t \in [-b, -a]$, constitui uma parametrização de Γ, mas de "orientação" contrária.

3. Para cada caminho indicado abaixo, determine a equação cartesiana da respectiva curva, esboce esta e indique de que modo é que o caminho a percorre.
   (a) $r(t) = (1-t^4, t^2), \ \ t \in [-1, 2]$.
   (b) $r(t) = (t^2 + 2t, t^4 + 1), \ \ t \in [0, 1]$.
   (c) $r(t) = (\sinh t, \cosh t), \ \ t \in [0, 1]$.
   (d) $r(t) = (\cos t, 3 - \sin t), \ \ t \in [0, \pi]$.
   (e) $r(t) = (e^{-t}, 1 + e^t), t \in [0, 1]$.
   (f) $r(t) = (-\frac{\sin t}{2+\cos t}, \frac{\cos t}{2+\cos t}), \ \ t \in [0, 2\pi]$.
   (g) $r(t) = (\sin t, \sin^3 t), \ \ t \in \mathbb{R}$.
   (h) $r(t) = (\cos t, \sin t, t), \ \ t > 0$.

4. Em cada uma das alíneas seguintes, determine uma parametrização para a curva indicada:
   (a) Circunferência de centro $(3, 1)$ e raio 1.
   (b) Circunferência de centro $(2, -1)$ e raio $\sqrt{2}$.
   (c) Elipse de centro em $(0, 1)$ e semi-eixos $a = 2$ e $b = 3$.

5. Qual a diferença entre os gráficos das equações $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e $x = a\cosh t, \ y = b\sinh t, \ \ t \in \mathbb{R}$ (a, b são constantes positivas)?

6. Determine uma parametrização para a circunferência de centro $(1, 1)$, raio 3 e velocidade angular de 5 radianos por segundo.

7. Esboce o gráfico da curva parametrizada por $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \ \ t \in [0, 2\pi]$, dita *astróide*. Mostre que a equação cartesiana desta curva é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

8. A Lua descreve uma órbita praticamente circular à volta da Terra. Considerando a Terra e a Lua como pontos situados a uma distância de 384564 Km um do outro, e tomando como 27,32 dias o tempo que cada órbita (ângulo 2π) demora a ser percorrida, determine uma sua parametrização, com origem na Terra, sendo que a distância é lida em quilómetros e o tempo em dias?

9. Seja Γ a curva de equações paramétricas $x = t^2 - 5,\ y = t^3,\ z = 3t + 1,\quad t \in \mathbb{R}$. Determine as equações paramétricas da tangente a Γ no ponto $r(2)$.

10. A posição de uma dada partícula num dado plano é dada por $r(t) = (t^2+t, t^3),\ \ t \in [0, 2]$. Determine a velocidade e a aceleração num dado instante t. Esboce a trajectória da partícula e represente $r'(1)$ e $r''(1)$.

11. Sendo as órbitas planetárias elipses de equações paramétricas $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\quad t \in [0, 2\pi],\ (0 < a < b)$, interprete fisicamente os vectores $r'(t)$ e $r''(t)$.