Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

exame de época especial Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Determine a equação do movimento de uma partícula, sabendo que a posição e a velocidade iniciais são, respectivamente, $r(0) = (1, 0)$ metros e $r'(0) = (3, 1)$ metros/segundo e que a sua aceleração é dada por

$$r''(t) = \Big(-\cos(t), -\frac{1}{(t+1)^2} + 2 \Big) \text{ metros/segundo}^2.$$

2. Calcule o integral triplo de $f(x, y.z) := z$ em

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \geq z + 1 \geq x^2 + y^2 \wedge (z-1)^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

3. Determine, caso existam, os extremos e os extremantes absolutos de $f(x, y) := x|y|$ em $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2ª parte

4. Calcule o trabalho efectuado pelo campo vectorial $F(x, y, z) := (yz, xz, xy)$ para transportar uma partícula a partir da origem do referencial e ao longo da curva Γ resultante da intersecção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ com o plano $z = y$ e que satisfaz $x \leq 0$.

   Sugestão: Observe que o campo $F(x, y, z)$ é igual ao gradiente de $f(x, y, z) := xyz$.

5. Recorde a definição de tangente a um ponto de uma curva que é dada no livro:

   Sejam C uma curva descrita por um caminho $r : I \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$. Se $r'(t_0)$ existir e for diferente de zero, diz-se que a recta que passa por $r(t_0)$ e tem a inclinação de $r'(t_0)$ é a recta tangente a C em $r(t_0)$.

   Como uma curva C pode ser descrita por muitos caminhos r diferentes e esta definição se baseia no cálculo de r', não é, à partida, claro que deste modo se obtenha sempre a mesma recta tangente num dado ponto de uma dada curva.

Considere, no entanto, o caso em que C é o gráfico de uma função $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, i.e.,

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a, b[\wedge y = f(x)\}, \tag{1}$$

considere um ponto $(x_0, y_0) \in C$, com x_0 um ponto de diferenciabilidade de f, e considere ainda uma qualquer parametrização r de C tal que $r'(t_0) \neq 0$, onde t_0 é tal que $r(t_0) = (x_0, y_0)$. Mostre que, nestas condições, a definição de recta tangente a C em (x_0, y_0) não depende da escolha da parametrização, sendo que o seu declive é sempre dado por $f'(x_0)$.

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

coordenadas esféricas: $x = \rho \cos\theta \sin\varphi$; $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$; $z = \rho \cos\varphi$

T. Green: $$\iint_D g_x(x, y) - f_y(x, y)\, dx\, dy = \int_r f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy.$$

T. Stokes: $$\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS = \int_{r\circ\alpha} f \cdot d(r \circ \alpha).$$

T. Gauss: $$\iiint_Q \operatorname{div} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_r f \cdot \hat{n}\, dS.$$

Cotação:

1. 4; 2. 6; 3. 5; 4. 4; 5. 4.