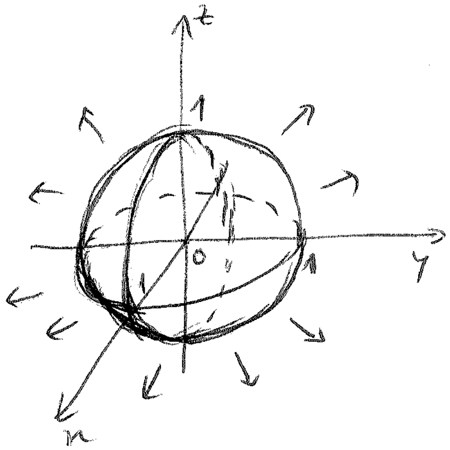
2º teste – resolução das 1.ªs quatro questões

1.



Pretende-se o fluxo de $F(x,y,z) := (x^3, y^3, z^3)$ através da superfície $x^2+y^2+z^2=1$, do interior para o exterior da bola B:

$$\iint_S (x^3, y^3, z^3)\cdot\hat{n}\, dS\,,$$

designando por S essa superfície.

Tanto quanto é verificável pelas condições indicadas no texto de apoio, o Teorema de Gauss é aqui aplicável (em particular, a função integranda é continuamente diferenciável em $\overline{B}$, B é projectável nos três planos coordenados e, como se pede um fluxo, a parametrização a considerar para a superfície deverá descrevê-la uma só vez, ...): atendendo ao sentido em relação ao qual se pede o fluxo,

$$\iint_S (x^3,y^3,z^3)\cdot\hat{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div}(x^3,y^3,z^3)\, dx\,dy\,dz$$

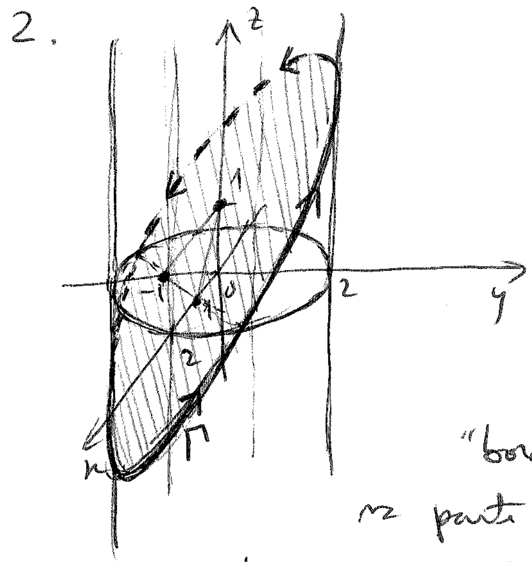
$$= \iiint_B 3x^2+3y^2+3z^2\, dx\,dy\,dz$$

usando mudança para coordenadas esféricas: $(x,y,z) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi]$, $\rho\in[0,1]$, jacobiano $= -\rho^2\sin\varphi$ $\rightarrow$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, d\rho$$

$$= 2\pi\left[\frac{3\rho^5}{5}\right]_0^1 \times \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{6\pi}{5}\times 2 = \frac{12\pi}{5}.$$

2.



$x=0, y=0 \Rightarrow \boxed{x-y+z=1 \Leftrightarrow z=1}$

$x=0, z=0 \Rightarrow \boxed{x-y+z=1 \Leftrightarrow y=-1}$

$y=0, z=0 \Rightarrow \boxed{x-y+z=1 \Leftrightarrow x=1}$

Como se pede que seja usado o Teorema de Stokes e a curva Γ é o "bordo" da superfície plana $x-y+z=1$ na parte que atravessa o cilindro sólido, tentaremos fazer o cálculo da circulação

$$\int_{r\circ\alpha} (y^3,-x^3,4z)\cdot d(r\circ\alpha) \quad \text{através do cálculo de}$$

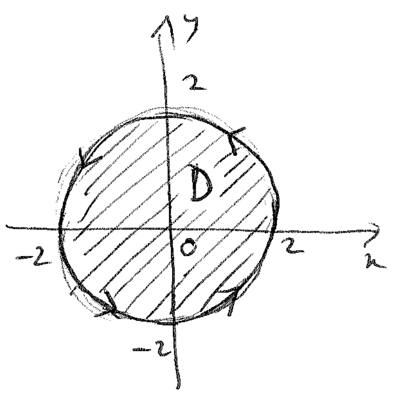
parametrização de Γ

$$\int_{r} \operatorname{rot}(y^3,-x^3,4z)\cdot \hat{n}\, dS$$

Observe-se que $(x,y,z)\longmapsto(y^3,-x^3,4z)$ é continuamente diferenciável e que, se escolhermos

$$r: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\longmapsto(x,y,1-x+y)$$

como parametrização (canónica) da superfície, onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$, obtemos um r que admite derivadas parciais de 2ª ordem contínuas num aberto que contém D (pode ser todo o $\mathbb{R}^2$), tal como é exigido no enunciado do Teorema de Stokes.



Além disso, observe-se ainda que D é, de facto, domínio de parametrização, e também região de integração, com fronteira dada por curva fechada simples, onde o Teorema de Green é aplicável.

O único requisito que falta verificar, para poder aplicar o Teorema de Stokes é observar que se parametrizarmos ∂D por um caminho fechado simples e (seccionalmente) regular que orienta ∂D positivamente, então ao aplicarmos r (que, no fundo, é obter $r\circ\alpha$) vamos obter uma parametrização fechada simples e (seccionalmente) regular de Γ no sentido desejado.

Assim, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{r\circ\alpha} (y^3, -x^3, 4z) \cdot d(r\circ\alpha) =$$

$$= \int_{r} \operatorname{rot}(y^3, -x^3, 4z) \cdot \hat{n}\, dS$$

$$= \int_{D} (0, 0, -3(x^2+y^2)) \cdot (1, -1, 1)\, dx\, dy$$

mudança para coordenadas polares: $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 2]$, jacobiano $= r$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -3r^2 \cdot r\, d\theta\, dr$$

$$= -6\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = -24\pi.$$

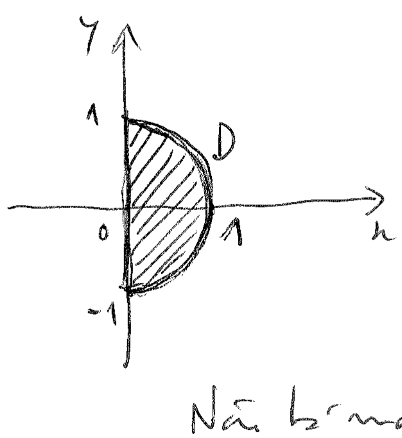
C.A.:

$$\operatorname{rot}(y^3, -x^3, 4z) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & -x^3 & 4z \end{vmatrix} =$$

$$= (0, 0, -3x^2 - 3y^2);$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (+1, -1, 1)$$

3. Os extremos absolutos têm que existir porque a função em causa é contínua num domínio limitado e fechado.



Pontos críticos em int D:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

logo todos os pontos da forma $(x, 0)$ em int D são críticos, valendo f zero em todos eles.

Não há mais pontos a considerar em int D, pois f é aí diferenciável.

4

Na parte da fronteira de D dada por $x=0$ a função vale constantemente 0.

Na parte da fronteira de D dada por $x^2+y^2=1$, os pontos críticos condicionados podem obter-se pelo método dos multiplicadores de Lagrange (com $g(x,y) := x^2+y^2$):

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \lambda 2x \\ 2xy = \lambda 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ y=0 \vee x=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=\lambda x \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2=2\lambda^2 \\ x=\lambda \end{cases}.$$ No 1.º caso, λ pode tomar-se 0

e de $x^2+0^2=1$ vem $x=1$ (tb devido à restrição $x\geq 0$),

de onde se obtém o ponto crítico $(1,0)$, onde f vale 0

Ainda no 1.º caso, λ não pode ser $\neq 0$, pois isso obrigaria x a ser 0 e $(x,y)=(0,0)$ não é solução de $x^2+y^2=1$.

No 2.º caso, substituindo em $x^2+y^2=1$ obtém-se $\lambda^2+2\lambda^2=1$, logo $\lambda^2=\frac{1}{3}$ e as duas possibilidades $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, de modo que se obtêm os pontos críticos $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ (atendendo novamente à restrição adicional $x\geq 0$),

onde f vale $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Observe-se ainda que a equação $\nabla g(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (2x,2y)=(0,0)$ não tem soluções em $x^2+y^2=1$ e que os pontos $(0,-1)$ e $(0,1)$ já foram considerados na parte de ∂D onde $x=0$.

Em conclusão, o mínimo de f em D é 0 e os minimizantes absolutos são todos os pontos da forma $(0,y)$ ou $(x,0)$ pertencentes a D (logo com $y\in[-1,1]$ no 1.º caso e $x\in[0,1]$ no 2.º); o máximo é $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ e os maximizantes absolutos são os pontos $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $$f(x,y)=\begin{cases} xy^2 & \text{se } x\geq 0 \\ -xy^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Nos pontos onde $x>0$ existe vizinhança onde a expressão se mantém xy^2, que define uma função continuamente diferenciável (i.e., com derivadas parciais contínuas), logo diferenciável (por resultado dado). Analogamente no caso dos pontos onde $x<0$, onde se mantém a expressão $-xy^2$, etc.

Não se podendo aplicar o raciocínio anterior ao caso dos pontos da forma $(0,y)$, com $y\in\mathbb{R}$, começamos por tentar determinar as derivadas parciais nestes pontos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|y^2}{h},$$

que só existe se $y=0$, valendo 0 nesse caso; se $y\neq 0$ temos diferentes limites laterais (com valores 1 e -1).

Não existindo uma das derivadas laterais de f em $(0,y)$ quando $y\neq 0$, podemos desde já dizer que f não é diferenciável nesses pontos.

No caso do ponto $(0,0)$, prosseguimos para o cálculo da outra derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Obtemos assim que $\nabla f(0,0)=(0,0)$ e a função será diferenciável em $(0,0)$ sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0.$$

(6)

Ora o limite na última expressão é

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\, y^2 .$$

Como $0 \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$ e y^2 é um infinitésimo,

o limite em causa vale, de facto, zero e portanto

<u>f é diferenciável em $(0,0)$.</u>