Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

2º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere a bola B de raio 1 centrada na origem. Determine o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) := (x^3, y^3, z^3)$ que se escoa para fora de B.

2. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) := (y^3, -x^3, 4z)$ e a curva Γ resultante da intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $x - y + z = 1$, curva esta suposta percorrida no sentido directo (quando vista de cima). Calcule a circulação do campo F ao longo de Γ fazendo uso do Teorema de Stokes.

3. Determine os extremos absolutos e os respectivos extremantes de $f(x, y) := xy^2$ em $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$, após justificar porque é que tais extremos absolutos têm que existir.

2ª parte

4. Estude a diferenciabilidade de $f(x, y) := |x|y^2$.

5. Sejam $g : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto A e (x_0, y_0, z_0) pertencente à superfície de nível $k \in \mathbb{R}$ de g. Designe-se por S tal superfície e suponha-se que $g'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. O chamado Teorema da função implícita garante que existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) e uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que

   (i) $f(x_0, y_0) = z_0$;
   (ii) o gráfico de f está contido em S;
   (iii) $f'_x = -g'_x/g'_z$, $f'_y = -g'_y/g'_z$.

   Mostre que, dado um qualquer vector pertencente ao plano tangente a S em (x_0, y_0, z_0), existe um caminho em S que passa por (x_0, y_0, z_0) e cujo vector velocidade nesse ponto coincide com o vector dado.

FIM

(O formulário e a cotação encontram-se no verso)

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

coordenadas esféricas: $x = \rho \cos\theta \sin\varphi$; $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$; $z = \rho \cos\varphi$

T. Green: $\displaystyle\iint_D g_x(x,y) - f_y(x,y)\,dx\,dy = \int_r f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy.$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\,dS = \int_{r\circ\alpha} f \cdot d(r \circ \alpha).$

T. Gauss: $\displaystyle\iiint_Q \operatorname{div} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_r f \cdot \hat{n}\,dS.$

Cotação:

1. 5; 2. 5; 3. 5; 4. 4; 5. 4.