Resolução das questões de 1 a 4 do 1º teste de AMIII de 2010/11

1. (a) Uma circunferência de centro na origem e raio 1: é que olhar de frente para o plano xOz corresponde a projectar ortogonalmente sobre esse plano, logo o que se vê a ser aí descrito é governado por

$$(\cos(3t), \sin(3t)) \quad , \quad t \in [0,\pi];$$

como $t \in [0,\pi] \Rightarrow 3t \in [0,3\pi]$, do que se sabe da representação paramétrica canónica da circunferência sai que a referida circunferência é descrita uma vez e meia.

(b) A rapidez é dada por $\|r'(t)\| = \sqrt{9\sin^2(3t) + 4 + 9\cos^2(3t)}$

$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, que é uma constante. Usou-se a fórmula fundamental da trigonometria no cálculo.

(c) O vector tangente em $r(\pi/2)$ é $r'(\pi/2) =$

$$= \left(-3\sin(3t), 2, 3\cos(3t)\right)\Big|_{t=\pi/2} = (3,2,0).$$

O plano normal terá então equação

$$(3,2,0)\cdot\left((x,y,z) - r(\pi/2)\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad (3,2,0)\cdot\left((x,y,z) - (0,\pi,-1)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 2(y-\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 2\pi.$$

2. $$V=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{\frac{2y^2}{3}} xy\,dx\right)dy+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{16-4y^2}} xy\,dx\right)dy$$

(a) Para o 1º integral iterado, o domínio de integração é

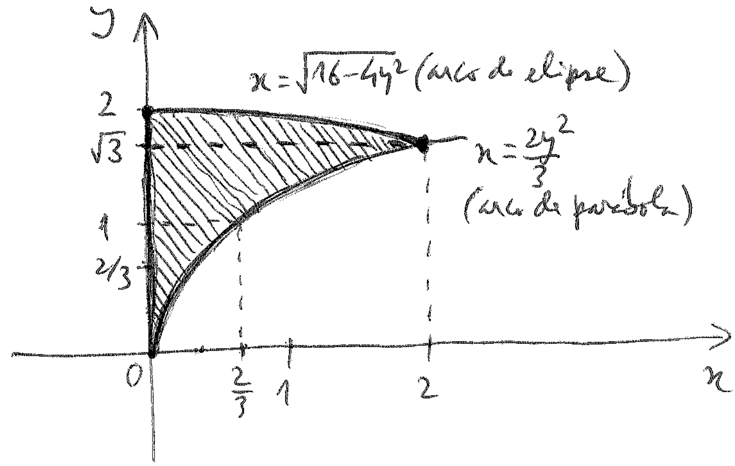
$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[0,\sqrt{3}] \text{ e } x\in\left[0,\tfrac{2y^2}{3}\right]\right\};$$

para o 2º integral iterado, o domínio de integração é

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[\sqrt{3},2] \text{ e } x\in\left[0,\sqrt{16-4y^2}\right]\right\}.$$

Assim, o domínio de integração total é $D=D_1\cup D_2$.

Esboço:



C.A.:

$y=0 \Rightarrow \frac{2y^2}{3}=0$

$y=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2y^2}{3}=2$

$y=1 \Rightarrow \frac{2y^2}{3}=\frac{2}{3}$

$y=\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{16-4y^2}=2$

$y=2 \Rightarrow \sqrt{16-4y^2}=0$

(b) $x=\frac{2y^2}{3} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}x}$, mas só interessa $y\geq 0$.

$x=\sqrt{16-4y^2} \Rightarrow x^2=16-4y^2 \Leftrightarrow 4y^2=16-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$, mas tb só interessa $y\geq 0$.

$$V=\int_0^2\left(\int_{\sqrt{\frac{3}{2}x}}^{\sqrt{4-x^2/4}} xy\,dy\right)dx$$

(c) Usando a alínea (b),

$$V = \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{\frac{3}{2}x}}^{y=\sqrt{4-x^2/4}} dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\left(4-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{2}x\right) dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^4}{8\times 4} - \frac{\cancel{3}}{4}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^2 = 4 - \frac{4\times \cancel{4}}{8\times \cancel{4}} - \frac{8}{4} =$$

$$= 4 - \frac{1}{2} - 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(Em alternativa, no caso de se usar a expressão original, ter-se-ia

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\frac{2y^2}{3}} dy + \int_{\sqrt{3}}^2 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{16-4y^2}} dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y}{2}\cdot\frac{4y^4}{9}\, dy + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{y}{2}(16-4y^2)\, dy$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{y^6}{6}\right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\left[8y^2 - \cancel{4}\frac{y^4}{\cancel{4}}\right]_{\sqrt{3}}^2$$

$$= \frac{2}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{3}\times\cancel{9}}{2\times\cancel{3}} + \frac{1}{2}(32-16-24+9)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(41-40) = \frac{3}{2} \quad).$$

3. O trabalho em causa é $\int_{r} f \cdot dr$, ou seja,

$$\int_0^{\pi} f(r(t))\cdot r'(t)\, dt = \int_0^{\pi} (\cos^2 t, -\sin^2 t)\cdot(-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} -\cos^2 t \sin t\, dt - \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t\, dt$$

$$= \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 0 = -\frac{2}{3}.$$

4. (a) $\sin \frac{1}{x^2+y^2}$ é limitada

e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$ (pela álgebra dos limites),

logo, por um resultado dado mais antes, tb

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

(produto de infinitésimo por limitada).

(b) Trata-se do cálculo de um limite segundo um subconjunto do domínio da função.

Observe-se tb que $(0,0)$ é pto de acumulação de A (A é união de circunferências concêntricas em $(0,0)$ com raio a tender para 0).

Para $(x,y)\in A$ tem-se que (para algum $k\in\mathbb{N}$)

$$h\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = h\left(\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi)\right) = h(0) = 1.$$

Como limite de constante é a própria constante, então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} h\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 1.$$

(c) Como já se calculou, na alínea anterior, o limite segundo A, vejamos se é possível calcular o limite segundo A^c (o complementar de A):

Observe-se tb que $(0,0)$ é pto de acumulação de A^c, como é evidente da descrição de A feita atrás (onde os raios das circunferências apenas ocupam os valores de forma

Para $(x,y)\in A^c$, não existe nenhum $k\in\mathbb{N}$ tal que $x^2+y^2=\frac{1}{k\pi}$, logo $\sin\frac{1}{x^2+y^2}\neq 0$ (suponde tb $(x,y)\neq(0,0)$); como tb $x^2+y^2\neq 0$ (observe-se que

$(0,0)$ não faz parte do domínio da expressão dada — e, mesmo que fizesse, poder-se-ia sempre assumir que $(x,y)\neq(0,0)$, já que se pretende o cálculo do limite em $(0,0)$), então

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\neq 0$$

e, portanto,

$$h\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0.$$

Como limite de constante é a própria constante, então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A^c}} h\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0.$$

Como os limites segundo dois subconjuntos diferentes dão valores diferentes (comparar com o resultado da alínea (b)), conclui-se que <u>não existe</u> $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

[Aparte: observe-se que nas alíneas (b) e (c) não era possível usar as regras do limite de composição, apesar de a expressão dada ser uma composição de aplicações: a proposição sobre o limite da composição, revisitada, não se podia usar porque h não é contínua em 0; a proposição inicial sobre o limite da composição não se podia usar porque a implicação $(x,y)\neq(0,0)\Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\neq 0$ é falsa (mais concretamente, é falsa para todo o $(x,y)\in A$)].