Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2010/11**

1º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere o movimento de uma partícula, expresso em função do tempo, parametrizado pela lei $r(t) = (\cos(3t), 2t, \sin(3t))$, $t \in [0, \pi]$.

   (a) Imagine que está a olhar de frente para o plano $x0z$. Que figura vê a ser descrita por r?

   (b) Mostre que a rapidez da partícula é constante ao longo do movimento.

   (c) Determine a equação do plano normal à direcção do movimento em $r(\pi/2)$.

2. Considere o integral duplo

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{\frac{2y^2}{3}} xy\,dx \right) dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{16-4y^2}} xy\,dx \right) dy.$$

   (a) Identifique analiticamente o domínio de integração e esboce-o.

   (b) Inverta a ordem de integração.

   (c) Calcule V.

3. Considere o campo vectorial $f(x, y) = (x^2, -y^2)$ que representa a força exercida sobre uma dada partícula situada no plano. Calcule o trabalho realizado por este campo quando a partícula se desloca sobre a curva parametrizada por $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$.

2ª parte

4. (a) Calcule, caso exista,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

   (b) Seja $h(u) := \begin{cases} 1 & \text{se } u = 0 \\ 0 & \text{se } u \neq 0 \end{cases}$. Calcule, caso exista,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} h\Big((x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}\Big),$$

   onde $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^2 + y^2 = \frac{1}{k\pi}\}$.

(c) Seja h como na alínea anterior. Calcule, caso exista,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h\Big((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\Big).$$

5. Prove a seguinte proposição:

   Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ e $h : B \to \mathbb{R}^p$. Sejam a e $b := \lim_{x\to a} f(x)$ pontos de acumulação de A e B, respectivamente. A seguinte igualdade é válida desde que exista o limite no segundo membro e se verifique a implicação $x \neq a \Rightarrow f(x) \neq b$:

$$\lim_{x\to a}(h\circ f)(x) = \lim_{y\to b} h(y).$$

FIM

Cotação:

1.(a) 1; (b) 1; (c) 2; 2.(a) 3; (b) 2; (c) 2; 3. 4; 4.(a) 1,5; (b) 1; (c) 1,5; 5. 4.