Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

exame de época especial Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Seja γ o caminho definido por $\gamma(t) := (2\cos t, 2\sin t, 3)$, $t \in [0, 2\pi]$. Designe por C a curva traçada por este caminho.

   (a) Descreva C em coordenadas cartesianas.

   (b) Calcule a recta tangente a C em $\gamma(\pi)$.

   (c) Calcule, usando directamente a definição, o integral de linha
   $$\int_\gamma (x - z)\,dx - xz\,dy + y^2\,dz.$$

2. Seja $f(x, y) := (x, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule a derivada $D(f \circ f)(x, y)$ usando a regra da cadeia.

3. Considere $f(x, y) := 4xy - 2x^2 - y^4$.

   (a) Determine e classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Determine os extremos (e respectivos extremantes) absolutos de f em $[0, 1] \times [0, 2]$.

2ª parte

4. Calcule novamente o integral considerado em 1.(c), mas desta feita através do uso do Teorema de Stokes (não se esqueça de justificar por que o pode fazer).

   (**Sugestão:** considere para superfície o círculo definido por $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 3$).

5. Sejam $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \wedge y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$ uma região de tipo I e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada tal que f é contínua em $\operatorname{int} D$. Prove que então o integral de f sobre D existe e pode ser calculado por
   $$\iint_D f = \int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \Big)\,dx.$$

   [**Obs.:** Justifique pormenorizadamente; a simples repetição do texto de apoio não é suficiente.]

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS = \int_{r\circ\alpha} f \cdot d(r\circ\alpha).$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 1; (c) 3; 2. 3; 3.(a) 4; (b) 3; 4. 4; 5. 4.