Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

1º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere a curva parametrizada pelo caminho $r(t) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t))$, $t \in [0,3]$.
   (a) Esboce a curva e indique o sentido em que é descrita.
   (b) Calcule as rectas tangente e normal à curva em $r(1)$.
   (c) Mostre que o caminho tem rapidez crescente.

2. Suponha que, sobre um ponto material de massa 2 kg, actua a força
$$F(t) = (t, 1 - t^2, 2e^{-t})$$
em cada instante t e represente por $r(t)$ a posição do ponto no mesmo instante. Determine r sabendo que a posição e velocidade iniciais são, respectivamente, $(1,0,1)$ metros e $(0,1,1)$ metros/segundo.

3. Seja D a região do 1º quadrante do plano $y0z$ definida pela conjunção das seguintes condições:
$$\begin{aligned} y + z &\leq 4 \\ yz + 4y &\leq 12. \end{aligned}$$
   (a) Esboce D.
   (b) Calcule o volume de $[0,4] \times D$.

2ª parte

4. Seja $f(x,y) := e^{(1/x)\ln(1+xy)}$.
   (a) Determine o domínio de definição de f, esboce-o e diga se é aberto, fechado, ambas ou nenhuma das coisas.
   (b) Seja k um número real dado. Calcule, caso exista,
$$\lim_{(x,y)\to(0,k)} f(x,y).$$

5. Sejam $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho seccionalmente suave e $f : r([a, b]) \to \mathbb{R}^n$ tais que $f \circ r$ é seccionalmente contínua. Seja $p := r \circ u$ uma reparametrização de r. Mostre que

$$\int_p f \cdot dp = \int_r f \cdot dr \quad \text{no caso de } p \text{ manter o sentido de } r;$$

$$\int_p f \cdot dp = -\int_r f \cdot dr \quad \text{no caso de } p \text{ inverter o sentido de } r.$$

FIM

Cotação:

1.(a) 1,5; (b) 2; (c) 1,5; 2. 4; 3.(a) 3; (b) 3; 4.(a) 1; (b) 3; 5. 4.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

2º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Sejam $f(x, y, z) := (0, z, 2y)$ um campo vectorial e S a porção de superfície do parabolóide $y = 5 - x^2 - z^2$ para a qual $y \geq 1$.

   (a) Construa uma parametrização para S, não se esquecendo de indicar o domínio também.

   (b) Obtenha uma equação para o plano tangente a S no ponto $P \equiv (1, 4, 0)$.

   (c) Calcule, usando directamente a definição, o integral de superfície
   $$\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS$$
   para uma parametrização $r(u, v)$ de S relativamente à qual seja positiva a segunda coordenada de $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$.

2. Considere o sólido Q definido pela conjunção das condições
   $$z^2 \geq 3(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad z \geq 0.$$

   (a) Descreva Q em coordenadas esféricas.

   (b) Calcule
   $$\iiint_Q z^2\, dxdydz.$$

3. Considere o problema de determinar os extremos absolutos de $f(x, y) := xy$ sujeita à condição $x^2 + 4y^2 = 4$.

   (a) Justifique que tais extremos absolutos existem.

   (b) Determine os maximizantes e minimizantes absolutos.

2ª parte

4. Calcule novamente o integral considerado em 1.(c), mas desta feita através do uso do Teorema de Stokes (não se esqueça de justificar por que o pode fazer).

5. Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que $r(I) \subset D$, e $g = f \circ r$. Seja t_0 um ponto de acumulação de I tal que $r(t_0) \in \operatorname{int} D$. Prove que se r e f são, respectivamente, diferenciáveis em t_0 e $r(t_0)$ então g é diferenciável em t_0 e

$$g'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0).$$

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

coordenadas esféricas: $x = \rho \cos\theta \sin\varphi$; $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$; $z = \rho \cos\varphi$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS = \int_{r\circ\alpha} f \cdot d(r \circ \alpha)$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 2; (c) 3; 2. (a) 2; (b) 2; 3.(a) 1; (b) 4; 4. 4; 5. 4.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP3; tipo V* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a curva parametrizada pelo caminho:

$$r(t) = (3\cos t, 3\sin t, t^{3/2}), \qquad t \in [0, 5].$$

Determine o comprimento do arco desta curva.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma Tp1 - A* Duração: 0h15

Nome:______________________________________

N Mec.________________**Curso:**__________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina e deverá ser resolvido na folha de enunciado.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. Esboce o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$x = 2\sinh t, \qquad y \leq 2\cosh t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

indicando qual o seu interior, a fronteira e o fecho.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma Tp1 - B* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.________________**Curso:**____________________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina e deverá ser resolvido na folha de enunciado.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. Considere uma circunferência parametrizada por $b(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$. A equação de um objecto que se desloca linearmente do centro para a periferia desta circunferência é assim descrito por

$$r(t) = tb(t).$$

Determine e interprete o vector aceleração a que o objecto é sujeito durante este movimento.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma Tp1 - A* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.______________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina e deverá ser resolvido na folha de enunciado.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. Considere a função $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

   (a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) Use a aproximação linear para estimar o valor de $f(0.8, 2.1)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma Tp1 - B* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.____________**Curso:**________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina e deverá ser resolvido na folha de enunciado.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. Considere a parametrização de uma superfície S dada por

$$r(\theta, z) = (\sqrt{z}\cos\theta, \sqrt{z}\sin\theta, z), \quad (\theta, z) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2].$$

   (a) Determine o plano tangente a S no ponto $P = r(\pi/4, 1)$.

   (b) Dê uma expressão para o cálculo da área de S.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma Tp2; tipos I e III* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.______________**Curso:**______________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. O seguinte caminho representa a equação do movimento de um objecto de massa $m = 10$ kg:

$$r(t) = (3\cos t, 3\sin t, t), \qquad t \geq 0,$$

movimento este expresso em metros (e t em segundos).

(a) A curva associada a este movimento está bem orientada?

(b) Determine os vectores velocidade e aceleração a que o objecto se encontra sujeito no instante $t = 7\pi/3$ seg, bem como a força exercida sobre o objecto.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP3; tipos I e VI* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.______________**Curso:**__________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere o caminho dado por $r(t) = (t^2, \sin t),\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, e designe por C a curva descrita por r.

(a) Determine uma equação cartesiana para C e faça um esboço desta curva.

[**Observação:** não é aconselhável tentar escrever y em função de x].

(b) Determine, se os houver, os pontos de C onde a recta tangente é vertical.

(c) Mostre que C é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que não é aberto nem fechado (pode usar apenas argumentos geométricos, se preferir).

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP3; tipo II* Duração: 0h15

Nome:____________________________________

Nº Mec.____________**Curso:**______________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a curva descrita pela equação cartesiana $y = \sin x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Esboce-a e determine uma parametrização r que a descreva da direita para a esquerda.

(b) Calcule a velocidade e a aceleração com que a curva é percorrida com essa parametrização.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP4; tipos I e VI* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere o caminho dado por $r(t) = (\sin t, |t|)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e designe por C a curva descrita por r.

(a) Determine uma equação cartesiana para C e faça um esboço desta curva.

[**Observação:** não é aconselhável tentar escrever x em função de y].

(b) Justifique a continuidade de r e a falta de diferenciabilidade em 0.

(c) Mostre que C é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ com interior vazio (pode usar apenas argumentos geométricos, se preferir)

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP4; tipo II* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a curva C descrita pela equação cartesiana $x = \cos y,\ y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Esboce-a e determine uma sua parametrização $r : [0, \frac{\pi}{4}] \to C$ para a qual a rapidez seja sempre superior ou igual a 2.

(b) Calcule a velocidade e a aceleração com que C é percorrida por r.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP4; tipo IV* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.______________**Curso:**__________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Um ponto material move-se em $\mathbb{R}^3$ de acordo com os dados seguintes, num sistema coerente de unidades:

- Parte de $(0,0,0)$ com velocidade inicial $(1,1,1)$
- A aceleração do movimento em cada instante t é

$$r''(t) := (6t, \cos t, e^t) \quad (0 \leq t).$$

1. Mostre que no instante $t = 5$ o ponto encontra-se em $(130, 6 - \cos 5, e^5 - 1)$.
2. Determine uma equação para a recta tangente à curva, trajectória do ponto material, em $(130, 6 - \cos 5, e^5 - 1)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 1: *turma TP4; tipo V* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a hélice contradomínio do caminho

$$t \mapsto r(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Verifique que o comprimento do arco descrito por r entre o ponto $r(0) = (1, 0, 0)$ e o ponto genérico $r(t)$ é o valor $s(t)$ dado por

$$s(t) \;=\; \sqrt{2}|t|.$$

2. A que distância sobre a hélice estão os pontos $(0, -1, -\frac{\pi}{2})$ e $(1, 0, 0)$?

3. Suponha que $\rho(\tau) := r\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) \quad (\tau \in \mathbb{R})$.

   (a) Verifique que a rapidez de ρ é 1.

   (b) Verifique que $r(\mathbb{R}) = \rho(\mathbb{R})$, i.e., que ρ e r descrevem a mesma curva.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP3; tipo XIV* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a superfície parametrizada definida pela expressão

$$r(t,\theta) = (\cosh t\, \cos\theta, \cosh t\, \sin\theta, \sinh t), \quad (t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

(recorde que $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ e que $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$).

1. Determine o plano tangente à superfície no ponto $r(0, \pi/2)$.
2. Identifique a superfície em termos cartesianos e esboce-a.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP3; tipos X e XII* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere as funções f e g definidas pelas expressões

$$f(t) = (e^t, \cos t, \sin t) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (uv, \sin(u + w)).$$

1. Estude a diferenciabilidade destas funções.
2. Use a regra da cadeia para calcular a matriz jacobiana de $g \circ f$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP3 - tipos XIV e XV* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.____________**Curso:**________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina e deverá ser resolvido na folha de enunciado.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (x, y, z)$ e a superfície S definida por

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad -2 \leq z \leq 0.$$

(a) Estabeleça uma parametrização para a superfície dada.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial dado através de S, no sentido da origem para a superfície.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP3 - tipos XIV e XV* Duração: 0h15

Nome:____

N Mec.____________**Curso:**________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina e deverá ser resolvido na folha de enunciado.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

1. Considere o campo escalar $f(x, y, z) = z$ e a superfície S definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \leq 0.$$

   (a) Estabeleça uma parametrização para a superfície dada.

   (b) Calcule o $\iint_S f(x, y, z)\, dS$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP4; tipos XIII e XV* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**______________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a função f definida pela expressão

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2.$$

1. Identifique a superfície de nível $f(x, y, z) = 1$ e esboce-a.
2. Escreva uma expressão, tão explícita quanto possível, cujo cálculo nos permita obter a área da porção da superfície de nível $f(x, y, z) = 1$ correspondente aos valores de x, y e z tais que $1 \leq x^2 + z^2 \leq 4$, $y \geq 0$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP4; tipos X e XII* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**____________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere as funções f e g definidas pelas expressões

$$f(s,t) = (s+t, s-t, st, s^2, t^2) \quad \text{e} \quad g(u,v,x,y,z) = (x^2-u, y-v^2, z^2).$$

1. Estude a diferenciabilidade destas funções.
2. Seja $(g \circ f)_2$ a segunda função coordenada de $g \circ f$. Use a regra da cadeia para calcular
$$\frac{\partial (g \circ f)_2}{\partial t}.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP4; tipo X* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**______________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1. Verifique que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\cos(e^{-\frac{1}{x^2}}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
2. Mostre que f é diferenciável.
3. Calcule $f'_{(-1,2)}(0,-3)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

mini-teste 2: *turma TP4; tipo XIII* Duração: 0h15

Nome:____

Nº Mec.________________**Curso:**______________________________

- **Este mini-teste, cotado para 20 valores, contribui em 10% para a classificação final nesta disciplina.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

Considere a função f definida pela expressão

$$f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2.$$

1. Indique para que valores de $k \in \mathbb{R}$ é que o plano $z = k$ intersecta a superfície de nível $f(x,y,z) = 1$ e, para cada tal k, identifique a intersecção que obtém.
2. Determine o plano tangente à superfície de nível $f(x,y,z) = 1$ em cada um dos seus pontos (a,b,c) (e simplifique o mais possível a expressão obtida).

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Suponha que, sobre um ponto material de massa 1/3 kg, actua a força
$$F(t) := \left(-\frac{\cos t}{3}, 3e^{3t}\right)$$
em cada instante t e represente por $r(t)$ a posição do ponto no mesmo instante. Determine r sabendo que a posição e velocidade iniciais são, respectivamente, $(1,1)$ metros e $(1,3)$ metros/segundo.

2. Seja C o cubo $[0,1]^3$. Calcule o integral de superfície
$$\iint_r f \cdot \hat{n}\, dS,$$
onde
$$f(x,y,z) := (x^2 + e^{y^2+z^2}, y^2 + x^2z^2, z^2 - e^y)$$
e r é uma parametrização da fronteira de C escolhida de modo a que $\hat{n}$ aponte para o exterior do cubo.

[**Obs.:** Pode admitir hipóteses razoáveis adicionais que lhe permitam aplicar algum dos resultados dados nas aulas.]

3. Considere
$$f(x,y) := (x^2-1)y + y^3 \quad \text{e} \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0 \ \wedge\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$
   (a) Determine e classifique os pontos críticos de f em $\operatorname{int} D$.
   (b) Determine os extremos (e respectivos extremantes) absolutos de f em D.

2ª parte

4. Calcule, caso exista,
$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y),$$
onde
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{se } y \neq -x \\ y & \text{se } y = -x \end{cases}.$$

5. Sejam D um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável. Prove que, dado qualquer caminho seccionalmente suave $r : [a, b] \to D$,

$$\int_r \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)).$$

[**Obs.:** Justifique pormenorizadamente; a simples repetição do texto de apoio não é suficiente.]

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

T. Green: $\displaystyle\iint_D g_x(x,y) - f_y(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_r f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy.$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\,dS = \int_{r\circ\alpha} f \cdot d(r \circ \alpha).$

T. Gauss: $\displaystyle\iiint_Q \operatorname{div} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iint_r f \cdot \hat{n}\,dS.$

Cotação:

1. 4; 2. 5; 3.(a) 3; (b) 3; 4. 4; 5. 4.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2009/10**

teste global Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue o formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Sejam $f(x,y,z) := (0, z, 2y)$ um campo vectorial e S a porção de superfície do parabolóide $y = 5 - x^2 - z^2$ para a qual $y \geq 1$.

   (a) Construa uma parametrização para S, não se esquecendo de indicar o domínio também.

   (b) Obtenha uma equação para o plano tangente a S no ponto $P \equiv (1, 4, 0)$.

   (c) Calcule o integral de superfície
   $$\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS$$
   para uma parametrização $r(u,v)$ de S relativamente à qual seja positiva a segunda coordenada de $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$.

2. Suponha que, sobre um ponto material de massa 1/3 kg, actua a força
   $$F(t) = (-\frac{\cos t}{3}, 3e^{3t})$$
   em cada instante t e represente por $r(t)$ a posição do ponto no mesmo instante. Determine r sabendo que a posição e velocidade iniciais são, respectivamente, $(1,1)$ metros e $(1,3)$ metros/segundo.

3. Considere o problema de determinar os extremos absolutos de $f(x,y) := xy$ sujeita à condição $x^2 + 4y^2 = 4$.

   (a) Justifique que tais extremos absolutos existem.

   (b) Determine os maximizantes e minimizantes absolutos.

2ª parte

4. Calcule, caso exista,
   $$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y),$$
   onde
   $$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{se } y \neq -x \\ y & \text{se } y = -x \end{cases}.$$

5. Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que $r(I) \subset D$, e $g = f \circ r$. Seja t_0 um ponto de acumulação de I tal que $r(t_0) \in \operatorname{int} D$. Prove que se r e f são, respectivamente, diferenciáveis em t_0 e $r(t_0)$ então g é diferenciável em t_0 e

$$g'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0).$$

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada no texto de apoio; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

T. Stokes: $$\iint_r \operatorname{rot} f \cdot \hat{n}\, dS = \int_{r \circ \alpha} f \cdot d(r \circ \alpha)$$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 2; (c) 3; 2. 4; 3.(a) 1; (b) 4; 4. 4; 5. 4.