Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2008/09**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. As superfícies de equação $z = 2x^2 + 3y^2$ e $x + 4z = 9$ intersectam-se segundo uma curva Γ.
   (a) Mostre que $P \equiv (1, 0, 2)$ é o único ponto de Γ para o qual os planos tangentes àquelas superfícies são ortogonais.
   (b) Determine uma equação ou equações para a recta tangente à curva Γ naquele ponto P.

2. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = x\left(x^2 - 3\right)\left(y^2 - 1\right),$$
onde $D := [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times [-1, 1]$.
   (a) Determine e classifique os extremos locais de f no interior de D.
   (b) Determine os extremos absolutos de f em D.

3. Calcule
$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{4z-3}}\, dS,$$
sendo S a porção da superfície de equação $z = 1 + x^2 + y^2$ situada abaixo do plano $z = 2$.

2ª parte

4. Considere a região D de $\mathbb{R}^3$ definida pelas condições
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \quad y \geq 0 \quad z \geq 0 \\ x + y &\geq 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 2 \\ z^2(x^2 + y^2) &\leq 1. \end{aligned}$$

Calcule o volume de D.

$\Big[$ **Sugestão:** Use coordenadas cilíndricas; para o efeito, as seguintes identidades, sumariamente enunciadas, poderão ser-lhe úteis:

$$\begin{aligned} \cos t + \sin t &= \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \\ \sec t &= \frac{1}{\cos t}, \\ \int \sec t \, dt &= \ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \ \Big]. \end{aligned}$$

5. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $a \in U$. Mostre que então f é contínua em a.

FIM

Cotação:

1.(a) 3; (b) 2 2. (a) 3; (b) 3; 3. 4; 4. 5; 5. 3.