Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2008/09**

teste global Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Seja S a superfície de nível dada por $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$.

   (a) Determine equações cartesianas para o plano tangente e para a recta normal a S no ponto $P = (0, 1, 0)$.

   (b) É possível representar S na vizinhança desse ponto através do gráfico de uma função diferenciável da forma $y = F(x, z)$? Justifique.

2. Calcule $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \sin(\pi x^2)\, dx\, dy$.

3. Considere o elipsóide de equação $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ e um cilindro circular recto inscrito nesse elipsóide e tendo o eixo dos zz como eixo de simetria. Designe por r o raio da base desse cilindro e por h a sua altura.

   (a) Mostre que, nestas condições, $r^2 + h^2 = 4$.

   (b) Determine o volume máximo que um tal cilindro pode assumir.

2ª parte

4. (a) Sejam f e F respectivamente um campo escalar e um campo de vectores em $\mathbb{R}^3$. Supondo que são de classe C^1, mostre que

$$\operatorname{div}(fF) = f\,\operatorname{div}F + F\bullet\nabla f.$$

   (b) Confirme directamente a veracidade da fórmula anterior no caso particular de $f(x, y, z) = x^2 y$ e $F(x, y, z) = (2xz^2, 1, xy^3 z)$.

5. Prove o seguinte caso particular do Teorema de Green:

   Sejam $\phi_1, \phi_2 \ : \ [a,b] \ \subset \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1, defina $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \ \wedge \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ e seja ainda $P : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Designe por ∂D^+ a fronteira de D orientada positivamente. Então
$$\int_{\partial D^+} P(x,y)\, dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dxdy.$$

FIM

Cotação:

1.(a) 3; (b) 2   2. 4;   3.(a) 2; (b) 4;   4.(a) 2; (b) 1;   5. 5.