# Análise Matemática III – 2008/09

## Resolução parcial do 1º Teste

1. (a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ não existe:

se restringirmos a "aproximação" a $(0,0,0)$ ao plano $x=0$, o quociente em causa dá $0$, que tende para $0$;

se restringirmos a "aproximação" a $(0,0,0)$ à recta $x=y=z$, o quociente em causa dá $\frac{1}{3}$, que tende para $\frac{1}{3}$.

Tendo obtido valores diferentes consoante o modo como $(x,y,z)$ se aproxima de $(0,0,0)$, o limite não pode existir.

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+z^2)\ln(x^2+z^2)$:

A função em causa é a composição

$$(x,y,z) \longmapsto x^2+z^2$$
$$t \longmapsto t\ln t\,,$$

onde $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2+z^2=0$. Como $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t$ é, pela regra de Cauchy, igual a $0$, a função $t\mapsto t\ln t$, inicialmente válida apenas para $t>0$, pode estender-se por continuidade a $t=0$. Em tal situação sabemos que o $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t$ coincide com o limite de $f_2$.

(b) Para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, $f_1$ é, obviamente, contínua (é o quociente de dois polinómios e o denominador não é zero). A função $f_2$ também é contínua em tal caso ( $x^2+z^2$ é função contínua, por ser polinomial, assim como $\ln t$, para $t>0$, e a composição de funções contínuas é contínua, o mesmo se passando com o produto), embora no subcaso $x^2+z^2=0$ (então, necessariamente, $y\neq 0$) se tenha que interpretar $(x^2+z^2)\ln(x^2+z^2)$ no sentido referido em (a), de modo a que $f$ esteja bem definida.

Sendo as suas componentes contínuas, sabemos então que $f$ é contínua (no caso $(x,y,z)\neq(0,0,0)$).

Para $(x,y,z)=(0,0,0)$, vimos em (a) que o limite de $f_1$ nem sequer existe, logo o mesmo sucede ao limite de $f$, e portanto $f$ é descontínua em $(0,0,0)$.

2. (a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0^2(h^2+0^2)}{h^2+0^4}-0}{h}=0$$

e analogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, logo $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

(b) Para $(x,y)\neq(0,0)$ a função tem derivadas parciais contínuas ( $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x^2+y^4)(3x^2y^2+y^4)-2x(x^3y^2+xy^4)}{(x^2+y^4)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x^2+y^4)(2x^3y+4xy^3)-4y^3(x^3y^2+xy^4)}{(x^2+y^4)^2},$$ quocientes de polinómios com os denominadores diferentes de zero), logo é diferenciável.

No caso de $(x,y)=(0,0)$, será diferenciável se, e só se,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{hk^2(h^2+k^2)}{h^2+k^4}-0-(0,0)\cdot(h,k)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|h|k^2\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^4}=0.$$

Como $\sqrt{h^2+k^2} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$ e, usando a

sugestão dada $(\forall a,b\in\mathbb{R},\ 2ab\leq a^2+b^2)$, $\quad 0\leq \frac{|h|k^2}{h^2+k^4}\leq\frac{1}{2}$,

então aquele limite é, de facto, 0.

Em conclusão, $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

3. (a) $\|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1^2} = \sqrt{2}$.

$\|r''(t)\| = \sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2+0^2} = 1$.

(b) <u>1º processo</u>: $D(T\circ r)(t) = D(\cos^2 t+\sin^2 t-t^2) = -2t$.

<u>2º processo</u> (usando a regra da cadeia):

$D(T\circ r)(t) = (\nabla T)(r(t))\cdot r'(t) = (2\cos t, 2\sin t, -2t)\cdot$

$\cdot(-\sin t, \cos t, 1) = -2\cancel{\sin t}\cos t + 2\cancel{\sin t}\cos t - 2t = -2t$.

(c) A direcção e sentido que minimiza a temperatura é, para cada ponto $r(t)$, a do vector $-\nabla T(r(t))$,

$= (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$. Por seu lado, em cada ponto $r(t)$ da curva o deslocamento faz-se segundo $r'(t)$,

$= (-\sin t, \cos t, 1)$.

<u>Duas alternativas de resolução</u>:

1ª) $(-2\cos t, -2\sin t, 2t)\times(-\sin t, \cos t, 1) =$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2\cos t & -2\sin t & 2t \\ -\sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-2\sin t-2t\cos t)-\hat{\jmath}(-2\cos t+2t\sin t) + \hat{k}(-2\cos^2 t-2\sin^2 t).$$

Para que os dois vectores sejam colineares, este produto externo teria de ser 0, em particular a 3ª componente, i.e., $-2(\cos^2 t+\sin^2 t)$, tem de ser 0. Como sabemos que isto é falso, então a resposta à questão do enunciado é negativa.

2ª) $(-2\cos t, -2\sin t, 2t)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)$ é igual a $\cancel{2\sin t\cos t} - \cancel{2\sin t\cos t} + 2t$, mas também é igual a $\sqrt{4\cos^2 t+4\sin^2 t+4t^2}\,\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,\cos\theta$, onde $\theta$ é o ângulo formado pelos dois vectores; isto é,

$$\cancel{2}t = \cancel{2}\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}\cos\theta.$$

Para que os dois vectores tenham a mesma direcção e sentido, $\cos\theta$ tem de valer 1, logo $t=\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}$, $\Rightarrow t^2 = 2(1+t^2)$. Como isto é, obviamente, falso, então a resposta à questão do enunciado é negativa.

4. Pontos críticos em $U:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<2\}$, aberto:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cancel{6}x-\cancel{6}y^3x^2=0\\ \cancel{6}y-\cancel{6}x^3y^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y^3x^2\\ y=x^3y^2\end{cases} \Leftrightarrow$$

se $x\neq 0$ e $y\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{y^3}\\ y=\frac{y^2}{y^9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^8=1\\ -\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\pm 1\\ x=\pm 1\end{cases}$$

(mais correctamente, $\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases} \vee \begin{cases}y=-1\\x=-1\end{cases}$)

No entanto, $(-1,-1)$ e $(1,1)$ não pertencem a $U$.

Quanto a $x=0 \vee y=0$:

$$\begin{cases}x=y^3x^2\\ y=x^3y^2\end{cases} \overset{x=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}0=0\\ y=0\end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases}x=y^3x^2\\ y=x^3y^2\end{cases} \overset{y=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x=0\\ 0=0\end{cases},$$

logo o único ponto crítico em $U$ é $(0,0)$.

Quanto ao que se passa em $\partial U$ (fronteira de $U$), isto é, quando $x^2+y^2=2$, como o nosso objectivo é calcular extremos (absolutos) de $f$, e $f(x,y)$ coincide com $h(x,y):=6-2x^3y^3$ em $\partial U$ — cf. obs. feita no enunciado —, logo os extremos das duas funções coincidem em $\partial U$, podemos, neste conjunto, trabalhar com a expressão mais simples de $h$ (mas o problema também não é complicado de se resolver se se usar a expressão original de $f$).

Pontos críticos de $h|_{\partial U}$, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, fazendo $g(x,y) := x^2+y^2-2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6y^3x^2 = \lambda 2x \\ -6x^3y^2 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \underset{\text{se } x\neq 0 \text{ e } y \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\cancel{3}y^3x = -\cancel{3}x^3y \\ -3x^3y = \lambda \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ \text{---} \\ \cancel{2}x^2 = \cancel{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ -3x^3y = \lambda \\ x = \pm 1 \end{cases}$$
, de onde saem as "soluções"

$(x,y) = (-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$ (possíveis: $\lambda$ ser $-1$ ou $+1$, consoante os casos)

Quanto a $x=0 \vee y=0$:

$$\begin{cases} -3y^3x^2 = \lambda x \\ -3x^3y^2 = \lambda y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \underset{x=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$
, de onde saem $(0,-\sqrt{2})$ e $(0,\sqrt{2})$;

$$\begin{cases} -3y^3x^2 = \lambda x \\ -3x^3y^2 = \lambda y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \underset{y=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda = 0 \\ 0 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$
, de onde saem $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$.

Como o método dos multiplicadores de Lagrange pressupõe que $\nabla g \neq 0$, vejamos se a equação $\nabla g = 0$ nos leva a considerar outros pontos também: $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, que é $0$ sse $(x,y) = (0,0)$, o qual não pertence a $\partial U$.

Calculando os valores de $f$ nos vários pontos críticos encontrados,

obtemos $f(0,0)=0$, $f(\pm 1,\pm 1)=4$, $f(\pm 1,\mp 1)=8$,
$f(0,\pm\sqrt{2})=f(\pm\sqrt{2},0)=6$.

Em conclusão, o mínimo absoluto é 0, atingido em $(0,0)$, e o máximo absoluto é 8, atingido em $(1,-1)$ e em $(-1,1)$. Usou-se o facto de, por $f$ ser contínua num conjunto limitado e fechado (como é o caso de $D$), se saber que atinge os extremos absolutos em pontos desse conjunto, os quais, em particular, têm que estar entre os vários pontos críticos encontrados.

5. (a) (cf. apontamentos das aulas)

(b) Aplique-se o Teorema da função implícita a $F(x,y,z):=g(x,y,z)-k$: tem-se $F$ de classe $C^1$ em $A$, $F(x_0,y_0,z_0)=$ $=g(x_0,y_0,z_0)-k=0$ (pois $(x_0,y_0,z_0)$ está em $S$) e $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, por hipótese; logo existe vizinhança $U\subset\mathbb{R}^2$ de $(x_0,y_0)$ e $V\subset\mathbb{R}$ de $z_0$ e uma (única) função $f: U\to V$ de classe $C^1$ tal que $F(x,y,f(x,y))=0$ para $(x,y)\in U$, tal que $z=f(x,y)$ sempre que $F(x,y,z)=0$ para $(x,y)\in U$ e $z\in V$, verificando $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Daqui sai que $f(x_0,y_0)=z_0$ (pois $(x_0,y_0)\in U$, $z_0\in V$ e $F(x_0,y_0,z_0)=0$); que qualquer ponto $(x,y,f(x,y))$ do gráfico de $f$ obedece à equação $g(x,y,f(x,y))=k$, logo está em $S$; que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}.$$

(c) $\forall t\in I$, $(x_0+tv_1,y_0+tv_2)\in U$, domínio de $f$, logo $c(t)=(x_0+tv_1,y_0+tv_2,f(x_0+tv_1,y_0+tv_2))\in$ gráfico de $f$, que está contido em $S$, por 5.(b) ii.

(d) $c'(0)=c'(t)\big|_{t=0}=\left(v_1,v_2,\nabla f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)\cdot(v_1,v_2)\right)\big|_{t=0}=$
$=\left(v_1,v_2,\nabla f(x_0,y_0)\cdot(v_1,v_2)\right)$.

(*)

Por outro lado, da hipótese sobre a escolha de $v_3$ sai que $0 = \nabla g(x_0,y_0,z_0)\cdot(v_1,v_2,v_3) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)v_2 + {}$ $+ \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)v_3$. Pela hipótese $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, podemos dividir por esta derivada, de modo que, por 5.(b) iii e i, obtemos

$$0 = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2 + v_3 \,,\quad \text{isto é,}$$

$$v_3 = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(v_1,v_2).$$

Usando esta informação em (*), obtém-se, por fim, que $c'(0) = (v_1, v_2, v_3)$.

Alcatrão
22-11-2008