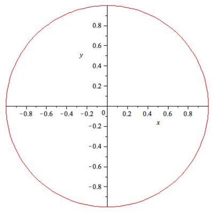
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2008/09**

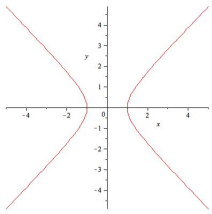
Cónicas e quádricas

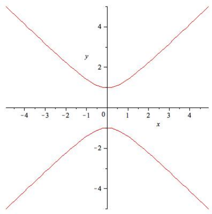
Cónicas

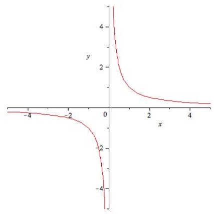
Circunferência $x^2 + y^2 = 1$ ($\Rightarrow$ Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b \neq 0, a \neq b$)



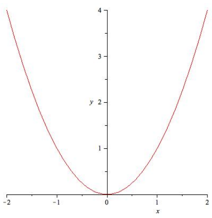
Hipérbole $x^2 - y^2 = 1,$ $y^2 - x^2 = 1,$ $xy = 1$

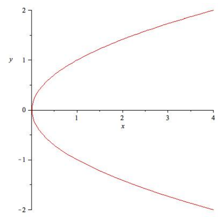






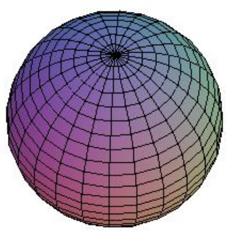
Parábola $x^2 = y,$ $y^2 = x$



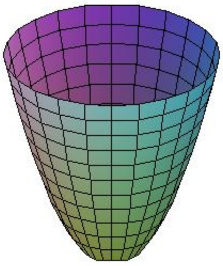


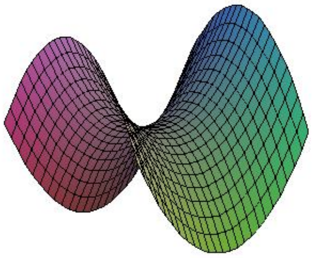
Quádricas

Superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($\Rightarrow$ Elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a, b, c \neq 0$ e não simultaneamente iguais)

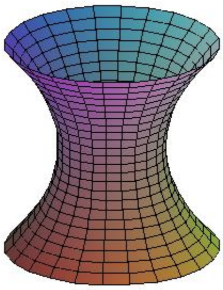


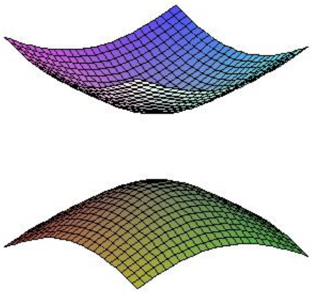
Parabolóide elíptico $x^2 + y^2 = z$ Parabolóide hiperbólico $x^2 - y^2 = z$



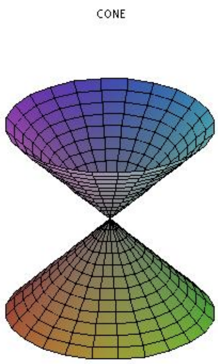


Hiperbolóide de 1 folha $x^2+y^2-z^2=1$ Hiperbolóide de 2 folhas $-x^2-y^2+z^2=1$





Cone $x^2 + y^2 = z^2$



Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2008/09**

Folha 0: *Revisões sobre vectores. Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.*

---

1. Ache uma equação para:
   (a) a recta que passa pelos pontos $P_1 = (7, 9, 2)$ e $P_2 = (3, 7, 0)$.
   (b) o plano que passa pelos pontos $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 1)$.
2. Ache a área do triângulo de vértices $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (0, 2, 5)$ e $P_3 = (5, 1, 2)$.
3. Obtenha a equação cartesiana do plano que contém os pontos $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (2, 1, 5)$ e $P_3 = (-1, 1, 2)$. Determine a intersecção com os eixos coordenados.
4. Para os vectores $\vec{u} = (3, 4, 5)$ e $\vec{v} = (0, 0, 1)$,
   (a) ache o comprimento de cada vector e o ângulo entre estes.
   (b) determine a projecção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, $Proj_{\vec{v}}(\vec{u})$.
5. Mostre que se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$, então $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.
6. Encontre um número real k de modo a que $\vec{u} = (1, 2, 1)$ seja ortogonal a $\vec{v} = (k, 3, 4)$.
7. Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vectores $\vec{u} := 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, $\vec{v} := \hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{w} := -\hat{\imath} - \hat{k}$.
8. Determine, caso exista, o ponto de intersecção das rectas $\vec{r}(t) = (1, 1, 2) + t(1, 0, 3), t \in \mathbb{R}$ e $\vec{s}(t) = (4, 2, 3) + t(3, 0, 1), t \in \mathbb{R}$.
9. Determine, caso existam, os pontos de intersecção da recta $\vec{r}(t) = (1, 0, 1) + t(1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$ com a superfície $x^2 + y^2 + 2z^2 = 9$. Determine, caso exista, a intersecção desta superfície com os planos coordenados.
10. Esboce as seguintes cónicas
    (a) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;
    (b) $y^2 = 4x - 2$;
    (c) $(y - 2)^2 - x^2 = 1$.
11. Esboce a superfície quádrica $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$.
12. Encontre as coordenadas polares dos seguintes pontos:
    (a) $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$
    (b) $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$
    (c) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
13. Encontre as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos (expressos em coordenadas polares):
    (a) $\left(5, \frac{\pi}{6}\right)$

(b) $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

(c) $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$

14. Represente graficamente

    (a) $r = 1 + \sin\theta$, para $\theta \in [0, 2\pi]$.

    (b) $r = 1 + \cos(3\theta)$, para $\theta \in [0, 2\pi]$.

15. Encontre as coordenadas cilíndricas e esféricas dos seguintes pontos.

    (a) $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}, -3\right)$

    (b) $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}, 11\right)$

    (c) $\left(-\sqrt{3}, -1, -5\right)$

    (d) $\left(-\frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

16. Descreva as seguintes superfícies em coordenadas cartesianas:

    (a) $\varphi = \pi/4$, onde φ é o ângulo polar em coordenadas esféricas.

    (b) $\theta = \pi/4$, onde θ é o ângulo medido a partir do eixo positivo dos $xx's$ nas coordenadas esféricas.

    (c) $r = 5$, onde r é uma das coordenadas cilíndricas.

17. Descreva o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas.

O texto de apoio seguido foi

J. Marsden, A. Tromba, Vector Calculus, W. H. Freeman and Company, 5ª edição, 2003 (cf. também http://algunoslibros.blogspot.com/2006/09/matematica.html, onde se pode aceder à tradução da 3ª edição para castelhano),

nas partes que têm a ver com o programa da disciplina. A lista de exercícios aconselhados aos alunos (e de onde foram extraídos os exercícios das aulas) são os que constam neste livro. Obviamente, por razões de direito de cópia, não se exibem aqui nem o texto nem os exercícios.