

- Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.
 - Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.
-

1ª parte

1. Em electrostática, a força de atracção entre duas partículas de carga oposta é

$$\vec{P} = \frac{\mathbf{k}}{r^3} \vec{r}, \quad \text{lei de Coulomb}$$

onde \mathbf{k} é uma constante, $\vec{r} = (x, y, z)$ e $r = \|\vec{r}\|$.

- (a) Calcule o domínio de diferenciabilidade de \vec{P} .
 (b) Mostre que \vec{P} é o gradiente da função f dada pela expressão $-\frac{\mathbf{k}}{r}$.
2. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = (y + 1)^2 + x^2 - 1,$$

onde $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- (a) Determine e classifique os extremos locais de f no interior de D .
 (b) Determine os extremos absolutos de f em D .
3. Considere o sólido delimitado pelas superfícies de equações

$$z = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{e} \quad z = 4 - x^2 - y^2.$$

- (a) Esboce o sólido em causa.
 (b) Calcule o respectivo volume.

2ª parte

4. Seja S o triângulo de vértices $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, e $P_3 = (0, 0, 1)$, e seja $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ um campo de vectores.

- (a) Mostre que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1 \wedge x + y + z = 1\}$.
 (b) Calcule $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

5. Sejam D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : [a, b] \rightarrow D$ funções de classe C^1 . Mostre que

$$\int_c \nabla f \cdot d\vec{s} = f(c(b)) - f(c(a)).$$

FIM

Cotação:

1.(a) 1; (b) 3; 2.(a) 3; (b) 3; 3.(a) 2; (b) 3; 4.(a) 2; (b) 2; 5. 4.