Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2008/09**

2º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)$ para transportar uma partícula de massa ao longo da curva Γ, onde Γ representa o arco de circunferência centrada na origem com extremos inicial (0,1) e final (1,0).

2. Calcule $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \sin(\pi x^2)\, dx\, dy$.

3. Considere a superfície S de equação $z = x^2 + y^2$.

   (a) Usando uma parametrização adequada, verifique que a fórmula da área da porção de S que se encontra acima de uma dada região R do plano $x0y$ é dada por
   $$\iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy.$$

   (b) Calcule a área da porção de S que é exterior ao cilindro de equação $x^2+y^2 = 1$ mas interior ao de equação $x^2 + y^2 = 4$.

2ª parte

4. (a) Sejam f e F respectivamente um campo escalar e um campo de vectores em $\mathbb{R}^3$. Supondo que são de classe C^1, mostre que
   $$\operatorname{div}(fF) = f\, \operatorname{div}F + F\bullet\nabla f.$$

   (b) Confirme directamente a veracidade da fórmula anterior no caso particular de $f(x,y,z) = x^2y$ e $F(x,y,z) = (2xz^2, 1, xy^3z)$.

5. Prove o seguinte caso particular do Teorema de Green:

   Sejam $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1, defina $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \quad \wedge \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\}$ e seja ainda $P : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Designe por ∂D^+ a fronteira de D orientada positivamente. Então
$$\int_{\partial D^+} P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy.$$

FIM

Cotação:

1. 4; 2. 4; 3.(a) 3; (b) 4; 4.(a) 2; (b) 1; 5. 5.