Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2008/09**

1º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere $f_1(x,y,z) := \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ e $f_2(x,y,z) := (x^2+z^2)\ln(x^2+z^2)$.

   (a) Averigue se existem ou não os limites de $f_1(x,y,z)$ e de $f_2(x,y,z)$ quando $(x,y,z) \to (0,0,0)$. No caso de existência, calcule-o(s).

   (b) Defina

$$f(x,y,z) := \begin{cases} (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ (0,0) & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}.$$

   Estude a continuidade de f.

2. Considere a função f dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2(x^2+y^2)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Calcule o gradiente de f na origem.

   (b) Estude a diferenciabilidade de f.

3. Suponha que a temperatura de um ponto situado no espaço é dada pela lei $T(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2$. Considere um corpo que se desloca segundo a curva dada por $\mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t, t)$, com $t \geq 0$.

   (a) Mostre que as normas dos vectores velocidade e aceleração do corpo são constantes.

   (b) Determine, por dois processos diferentes, a derivada $D(T \circ \mathbf{r})$ da temperatura do corpo ao longo da curva dada.

   (c) Há algum ponto da curva onde o corpo se desloque na direcção e sentido que minimiza a temperatura? Justifique a sua resposta.

4. Determine os extremos absolutos da função $f(x,y) := 3x^2 + 3y^2 - 2x^3y^3$ em $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

   [**Obs.:** Repare que quando $x^2 + y^2 = 2$ se tem $f(x,y) = 6 - 2x^3y^3$.]

2ª parte

5. Sejam $g : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto A e (x_0, y_0, z_0) pertencente à superfície de nível S com equação $g(x, y, z) = k$, para k uma constante dada. Suponha também que $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

   (a) Prove o seguinte resultado, dado nas aulas: $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \bullet \mathbf{c}'(0) = 0$, qualquer que seja o caminho diferenciável $\mathbf{c}$ em S tal que $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

   (b) Use o Teorema da função implícita e mostre que existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) e uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 que verificam o seguinte:

      i. $f(x_0, y_0) = z_0$;

      ii. o gráfico de f está contido em S;

      iii. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}.$

   (c) Suponha que U e f são os dados na alínea anterior, que $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, que $\varepsilon > 0$, que $I :=] - \varepsilon, \varepsilon[$, e que

$$\begin{aligned} \forall t \in I, &\qquad (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \in U \\ \forall t \in I, \quad \mathbf{c}(t) &:= (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)). \end{aligned}$$

   Mostre que

$$\forall t \in I, \quad \mathbf{c}(t) \in S.$$

   (d) Mostre que, dados U, f, (v_1, v_2), I e $\mathbf{c}$ como anteriormente definidos, se $v_3 \in \mathbb{R}$ for escolhido de tal modo que $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \bullet (v_1, v_2, v_3) = 0$, então $\mathbf{c}'(0) = (v_1, v_2, v_3)$.

FIM

Cotação:

1.(a) 2,5; (b) 1; 2.(a) 1; (b) 2; 3.(a) 1; (b) 1,5; (c) 1,5; 4. 4,5;
5. (a) 2; (b) 2,5; (c) 1; (d) 2,5.