Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 1: *Funções vectoriais*

---

1. Sejam f, g funções vectoriais de variável real definidas como
$$f(t) = (t, t^2 + 1, \frac{t}{t+1}), \quad g(t) = (t+1, 1, \frac{t}{t^2+1}).$$
Determine
(a) $f \cdot g$; (b) $f \times g$;

2. Determine o domínio da função vectorial $f(x, y, z, t) = (\frac{xy}{zt}, \sqrt{6 - x^2y^2})$.

3. Considere a função vectorial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t, \sin t)$. Mostre que f é contínua em todos os pontos do seu domínio.

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 2x_3^2$. Use os resultados de continuidade para confirmar que f é contínua.

   Sugestão: Verifique primeiro que as funções auxiliares $\pi_j(x_1, x_2, x_3) = x_j$, $j = 1, 2, 3$, são contínuas.

5. Mostre que um polinómio $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínuo.

6. Enuncie e demonstre um teorema que envolva quociente de polinómios.

7. Considere uma função vectorial $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(n, m \in \mathbb{N})$. Suponha que existe uma constante $K > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$ tais que $||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||^\alpha$, para todos $x, y \in D(f)$. Mostre então que f é contínua no seu domínio.

   No caso de $\alpha = 1$, as funções que satisfazem esta desigualdade dizem-se *funções de Lipschitz.*

8. Mostre que toda a função de Lipschitz é uniformemente contínua no seu domínio.

9. É verdade que se f for uma função vectorial uniformemente contínua, também $||f||$ o será? Justifique.

   O que pode dizer da recíproca?

10. Mesma questão, com "uniformemente contínua" substituída por "contínua".

11. Seja $f : D(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Mostre que f é automaticamente contínua no seu domínio. Será também uniformemente contínua?

    (Comente o "usual" conceito de continuidade de funções como sendo aquelas cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel.)

12. Considere a seguinte definição: um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ sse para todo o $r > 0$, a vizinhança $B(x, r)$ contém um ponto de A distinto de x. Mostre que esta definição é equivalente à definição de ponto de acumulação anteriormente dada.

13. Dê um exemplo de um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ que não possua pontos de acumulação. Mostre que se uma função f tem esse tipo de conjunto por domínio, então f é contínua.

14. Seja $\{x_k\}_{k=1}^n$ um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^m$. Mostre que este conjunto não possui pontos de acumulação.

15. Suponha S um conjunto de pontos tais que a distância entre dois quaisquer dos seus pontos é pelo menos 1. Mostre que S não pode possuir pontos de acumulação.

16. Na definição de limite, porque razão é exigido que x seja ponto de acumulação do domínio $D(f)$? Compare a resposta com a questão 11.

17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Sugestão: Calcule os limites segundo as rectas $x = y$ e $y = 0$.

18. Determine, se possível, os seguintes limites:

    (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

    (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;

    (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^4)^2}{(x^2+y^4)^2}$;
    Sugestão: Calcule os limites segundo a recta $y = 0$ e a parábola $x = y^2$.

    (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin(\frac{1}{x^2+y^2})$;

    (e) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{-2yx^2+8yx+34y+3y^3-18y^2+6x^2-13x-20-xy^2-x^3}{-y^2+4y-5-x^2+2x}$;
    Sugestão: Efectue a mudança de variável $(s,t) = (x-1, y-2)$.

19. Mostre que, na questão 18c, se tem $\lim_{t\to 0} f(tx,ty) = \lim_{t\to 0} \frac{[(tx)^2-(ty)^4]^2}{[(tx)^2+(ty)^4]^2} = 1$, para qualquer $(x,y) \neq (0,0)$.

20. Comente a seguinte afirmação

    "$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ implica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$".

    (Entenda-se por comente que prove ou dê um contra-exemplo).

21. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2y + \sin(xyz)$. Será que f atinge um máximo no conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 8\}$? Explique.

22. Suponha que g é uma função vectorial de variável real contínua, definida em $[0,\infty)$. Prove que $\lim_{x\to x_0} g(||x||) = g(||x_0||)$, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$.