Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 9: *Método dos multiplicadores de Lagrange*

---

1. Quais as dimensões do maior rectângulo (no sentido de máxima área) que pode ser inscrito numa circunferência de raio $r > 0$?

2. Encontre o(s) ponto(s) da curva $xy^2 = 9$ que estão o mais próximo possível da origem.

3. Uma lata tem o volume 36π cm^3. O topo e a base da lata são feitos de latão, que custa 0.04 euros por cm^2, enquanto que a parte lateral da lata é feita de alumínio e custa 0.05 euros por cm^2. Quais as dimensões que deve ter a lata para minimizar o custo de produção?

4. Existe um ponto da curva $xy = 4$ que esteja o mais afastado possível da origem? Explique a sua resposta. O que nos diz esse facto sobre o método dos multiplicadores de Lagrange?

5. Encontre o ponto da curva gerada pela intersecção das superfícies $2x + 3y + z = 3$ e $x^2 + y^2 = 4$ e que se encontra o mais próximo possível da origem.

6. (a) Maximize x^2y^2 sujeita à condição $\frac{x^{2p}}{p} + \frac{y^{2q}}{q} = r^2$, onde $p, q > 1$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (b) Use o facto de que o máximo é atingido quando $x^{2p} = y^{2q} = r^2$ para concluir que
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \; x, y > 0.$$

7. Maximize

   (a) $f(x, y) = 2x + y$ sujeita à condição $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$;

   (b) $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeita à condição $x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1$;

8. A resposta obtida no exercício 1 mudará se pensarmos num rectângulo interior a um círculo, em vez de numa circunferência? Justifique.