Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 8: *Gradiente e pontos de estacionariedade*

---

1. Encontre o plano tangente à superfície de nível correspondente no ponto P indicado:

   (a) $f(x, y, z) = x^2y + z^3$ em $P = (1, 1, 1)$

   (b) $f(x, y, z) = z \sin(x^2y) + 2^{x+y}$ em $P = (1, 1, 2)$

   (c) $f(x, y, z) = \cos(x) + z \sin(x + y)$ em $P = (-\pi, \frac{3\pi}{2}, 2)$

2. O ponto $(1, 1, \sqrt{2})$ pertence à superfície de nível $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

   (a) Encontre a recta perpendicular à superfície nesse ponto.

   (b) Este ponto pertence à intersecção da superfície de nível dada com $y^2+2z^2 = 5$. Determine o ângulo entre os respectivos planos tangentes nesse ponto.

3. A intersecção entre as superfícies de nível $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z = 4$ define uma curva, à qual pertence o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. Determine o vector director da tangente a essa curva neste ponto.

4. Num contexto mais geral, sejam $f_1(x, y, z) = 0$ e $f_2(x, y, z) = 0$ duas superfícies que se intersectam numa curva de parametrização $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I = [a, b]$. Que condição deve impôr aos vectores gradientes por forma a que estes determinem um vector director da tangente a essa curva num dado ponto $P = \vec{r}(t_0)$ $(t_0 \in (a, b))$?

5. Seja $f(x, y) = \arctan(6xy^2 - 2x^3 - 3y^4)$. Use a matriz hessiana para estudar os pontos estacionários $(1, 1)$ e $(1, -1)$ da função.

6. Mostre que, se $H = H^T$ e tivermos $H\vec{x} = \lambda\vec{x}$ e $H\vec{y} = \mu\vec{y}$ para $\lambda \neq \mu$, então $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

7. Mostre que os pontos $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$, $(0, -5)$ e $(1, -5)$ são pontos de estacionariedade de $f(x, y) = 2x^4 - 4x^3 + 42x^2 + 8x^2y - 8xy - 40x + 2y^2 + 20y + 50$, e classifique-os.

8. Mostre que os pontos $(\frac{3}{2}, \frac{27}{20})$, $(0, 0)$ e $(3, 0)$ são pontos de estacionariedade de $f(x, y) = 5x^4 - 30x^3 + 45x^2 + 6x^2y - 18xy + 5y^2$, e classifique-os.

9. Encontre e classifique os pontos de estacionariedade de

   (a) $f(x, y, z) = 4x^2 - 30x + 510 - 2xy + 60y - 2xz - 70z + 4y^2 - 2yz + 4z^2$.

   (b) $f(x, y, z) = -\frac{11}{3}x^2 + \frac{40}{3}x - \frac{56}{3} + \frac{8}{3}xy + \frac{10}{3}y - \frac{4}{3}xz + \frac{22}{3}z - \frac{11}{3}y^2 - \frac{4}{3}yz - \frac{5}{3}z^2$.

10. Mostre que os pontos de estacionariedade da função

$$f(x, y, z) = -2x^2y - 6xy - 4x^2z - 12xz + y^2 + 2yz$$

são da forma $(t, 2t^2 + 6t, -t^2 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Classifique-os.