Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 7: *Derivada da função composta (regra da cadeia)*

---

1. Seja $z = f(y) = (y_1^2 + y_2^2 + \sin y_3 + y_4)$ e $y = g(x) \equiv \begin{pmatrix} x_1 + x_4 + x_3 \\ x_2^2 - x_1 + x_2 \\ x_2^2 + x_1 + \sin x_4 \\ x_4 + x_2 \end{pmatrix}$.

   Determine $D(f \circ g)(x)$. Escreva $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

2. Seja $z = f(y) = \begin{pmatrix} y_1^2 + \sin y_2 + \tan y_3 \\ y_1^2 y_2 + y_3 \end{pmatrix}$ e $y = g(x) \equiv \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 - x_1 + x_2 \\ x_2^2 + x_1 + \sin x_2 \end{pmatrix}$.

   Determine $D(f \circ g)(x)$. Escreva $\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2$ e $k = 1, 2$.

3. Seja $z = f(y) = \begin{pmatrix} y_1^2 + \sin y_2 + \tan y_3 \\ y_1^2 y_2 + y_3 \\ \cos(y_1^2) + y_2^3 y_3 \end{pmatrix}$ e $y = g(x) \equiv \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2^2 - x_1 + x_3 \\ x_3^2 + x_1 + \sin x_2 \end{pmatrix}$.

   Determine $D(f \circ g)(x)$. Escreva $\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ e $k = 1, 2, 3$.

4. Seja $z = f(y) = \begin{pmatrix} y_2^2 + \sin y_1 + \sec y_2 + y_4 \\ y_1^2 y_2 + y_3^3 \\ y_2^3 y_4 + y_1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ e $y = g(x) \equiv \begin{pmatrix} x_1 + 2x_4 \\ x_2^2 - 2x_1 + x_3 \\ x_3^2 + x_1 + \cos x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$.

   Determine $D(f \circ g)(x)$. Escreva $\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$ e $k = 1, 2, 3, 4$.

5. Numa máquina de comprimir lixo, um bloco rectangular de lixo está a ser comprimido. A largura está a mudar à razão de -1 centímetros por segundo, a profundidade está a mudar à razão de -2 centímetros por segundo e a altura está a mudar à razão de -3 centímetros por segundo. Quão rápido está o volume a mudar quando a profundidade é 20, a altura é 10 e a largura é 10?

6. Numa máquina de comprimir lixo, um bloco rectangular de lixo está a ser comprimido. A largura está a mudar à razão de -2 centímetros por segundo, a profundidade está a mudar à razão de -1 centímetros por segundo e a altura está a mudar à razão de -4 centímetros por segundo. Quão rápido está a área da superfície a mudar quando a profundidade é 20, a altura é 10 e a largura é 10?

7. A lei do gás ideal é dada por $PV = kT$, onde k é uma constante que depende do número de moles e do gás em consideração (P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura). Se V estiver a mudar à razão de 2 cm cúbicos por segundo e T estiver a mudar à razão de 3 graus kelvin por segundo, quão depressa está a pressão a mudar quando $T = 300$ e V é igual a 400 cm cúbicos?

8. Seja S uma superfície de nível da forma $f(x_1, x_2, x_3) = C$. Suponha que $r(t)$ é uma curva no espaço que se encontra nesta superfície de nível. Então $f(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = C$. Usando a regra da cadeia, mostre que

$$Df(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \cdot (r_1'(t), r_2'(t), r_3'(t)) = 0$$

e observe que isto é equivalente a

$$\nabla f(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \cdot (r_1'(t), r_2'(t), r_3'(t)) = 0.$$

Qual é o facto geométrico que se acabou de estabelecer?

9. Suponha que f é uma função de classe C^1 que aplica bijectivamente um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ num subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^m$ tal que a sua inversa f^{-1} também é de classe C^1. O que deve ser satisfeito quanto a n e m? Porquê? **Sugestão:** Considere o Exemplo 26.4.12. Também pode usar o facto de que se A é uma matriz $m \times n$ que aplica $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$, então $m \leq n$.