Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 6: *Diferenciabilidade e derivadas*

---

1. Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\frac{1}{x}) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}.$$
Determine os pontos em que f é diferenciável. Calcule o gradiente de f nesses pontos.

2. Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} x & se\ |y| > |x| \\ -x & se\ |y| \leq |x| \end{cases}.$$
Mostre que f é contínua em $(0,0)$, que as suas derivadas parciais existem nesse ponto mas que a função não é diferenciável aí.

3. Determine Df no ponto indicado, sendo

   (a) Ponto $(1,2,3)$ e $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2\sin y + z^3 \\ \sin(x+y) + z^3\cos x \end{pmatrix}$.

   (b) Ponto $(1,2,3)$ e $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\tan y + z^3 \\ \cos(x+y) + z^3\cos x \end{pmatrix}$.

   (c) Ponto (x,y,z) e $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin y + z^3 \\ \sin(x+y) + z^3\cos x \\ x^5 + y^2 \end{pmatrix}$.

4. Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^4)^2}{(x^2+y^4)^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que todas as derivadas direccionais de f em $(0,0)$ existem e são nulas, mas que a função nem sequer é contínua em $(0,0)$, logo, não é aí diferenciável. Justifique.

   (b) Mostre que as derivadas parciais existem mas não são contínuas na origem.

5. Um certo edifício tem a forma da metade superior do elipsóide $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{900} + \frac{z^2}{400} = 1$ (donde, $z \geq 0$), sendo as dimensões dadas em metros.

   O edifício precisa de ser pintado e a tinta, após aplicação, produz uma camada com uma espessura de 0.005 m. Quantos metros cúbicos de tinta serão precisos?

   Sugestão: note que o volume de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e $z \geq 0$ é dado por $\frac{2}{3}\pi abc$ e o aumento de espessura devido à tinta corresponde a tomar os semi-eixos do elipsóide aumentados desse mesmo valor.