Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 5: *Funções vectoriais: gráficos, superfícies de nível e derivadas parciais*

---

1. Represente graficamente (após determinar o seu domínio, claro) as funções

   (a) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{9 - 9x^2 - y^2}$
   (c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

2. Encontre a derivada direccional da função escalar f no ponto P segunda a direcção do vector $\vec{v}$, sendo

   (a) $f(x,y) = x^2y + y^3$, $P = (3,0)$ e $\vec{v} = (1,-1)$;
   (b) $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2) + z$, $P = (0,0,3)$ e $\vec{v} = (1,1,-1)$;
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$, $P = (0,0)$ e $\vec{v}$ um vector arbitrário (não nulo) de $\mathbb{R}^2$;

3. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de f, sendo

   (a) $f(x,y) = x^2 \sin(x+y)$;
   (b) $f(x,y,z) = \ln(x + y^2) + z^2$;
   (c) $f(x,y,z) = x^2y + \cos(xy) + yz^3$;
   (d) $f(x,y,z) = z\exp(x^2 + y^2)\sin(x+y)$;
   (e) $f(x,y,z) = x^{y^2+z}$;
   (f) $f(x,y,z) = (y^2, z^2\sin(xy), z^3x)$;

4. Considere a função $f(x,y,z) = \ln(x + y^2) + z^2$ (alínea 3b). Determine

   (a) a sua derivada direccional no ponto $(1,1,1)$ segundo o vector $(1,1,-1)$;
   (b) se existe um valor máximo para o conjunto das derivadas direccionais de f nesse ponto.

5. Uma chapa de metal, situada num plano XoY, é aquecida de tal modo que a sua temperatura T é inversamente proporcional à distância do ponto à origem.

   (a) Se a temperatura no ponto $P = (3,4)$ é de 100^oC, determine a taxa de variação (ou derivada direccional) de T em P na direcção do vector $(1,1)$.
   (b) A partir de P, em que direcção a temperatura aumenta mais rapidamente? Em que direcção a temperatura se mantém inalterada?

6. Calcule as derivadas parciais mistas de segunda ordem de f, e verifique que são iguais, sendo

   (a) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4 + \sin(xyz)$;
   (b) $f(x,y,z) = z\ln(x^2 + y^2 + 1)$;

(c) $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$;

7. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$. Mostre que as derivadas mistas existem, mas não tomam o mesmo valor.

8. Sejam $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $x \in int(D(f)) \neq \emptyset$. Mostre que se tivermos, numa vizinhança V de x, a desigualdade $f(x) \leq f(y)$ para todo $y \in V$, então $D_v f(x) = 0$ qualquer que seja a direcção $v \neq 0$.

   Sugestão: prove o resultado para as derivadas parciais de f em x.

9. Experiências numéricas dão a colecção de pares ordenados $(t_i, x_i), i = 1, \cdots, n$, onde a cada tempo distinto t_i corresponde um valor numérico x_i. Use a alínea anterior para encontrar condições para a recta $x = at + b$ que aproxima a colecção de pares ordenados no sentido em que a função $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(at_i + b - x_i)^2$ toma o menor valor possível.

10. Sejam f, g funções real de variável real de classe C^2. Mostre que $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ é solução da equação de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

11. Mostre que, se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $\Delta u = \lambda u$, então $v = e^{\lambda t} u$ é solução da equação do calor $\partial_t v - \Delta v = 0$.

12. Mostre que $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} exp(-\frac{||x||^2}{4c^2 t})$, onde $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, é solução da equação do calor $\partial_t u - c^2 \Delta u = 0$.