Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 3: *Integrais de linha*

---

1. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Calcule o trabalho realizado para transportar um corpo da posição $r(0)$ até $r(3)$, ao longo da curva
   (a) $C : r(t) = (t,t,t),\ t \in [0,3]$;
   (b) $C : r(t) = (t,t^2,t),\ t \in [0,3]$;

2. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (z, xz, xy)$. Calcule o trabalho realizado para transportar um corpo da posição $r(0)$ até $r(1)$, ao longo da curva
   (a) $C : r(t) = (t,t,t),\ t \in [0,1]$;
   (b) $C : r(t) = (t,t^2,t),\ t \in [0,1]$;

3. Determine o trabalho realizado para deslocar um corpo da posição inicial para a final ao longo de uma curva $C : r(t) = (\cos(2t), 2\sin(2t), t),\ t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, quando este se encontra sujeito ao campo de forças (ou campo vectorial)
$$F(x,y,z) = (y, x+z^2, 2yz).$$

4. Considere um corpo cuja posição é dada pelo vector $r(t) = (t, \cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$, e que se encontra sujeito ao campo de forças em $\mathbb{R}^3$ dado por
$$F(x,y,z) = (2xy, x^2+2yz, y^2).$$
   Encontre o trabalho realizado para deslocar este corpo da posição $r(0)$ para $r(2\pi)$.

5. Mostre que o trabalho realizado para transportar um corpo de massa m submetido a um campo vectorial $F(x,y,z)$ ao longo de uma curva $C : r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$ é dado pela diferença entre as respectivas energias cinéticas.
   Sugestão: relembre que $Energia\ cinética = \frac{1}{2}m||v||^2$ e que (segunda lei de Newton) $F = ma$.

6. Mostre que se tem independência do integral de linha de campos escalares $\int_C f ds$ relativamente à parameterização da curva C, isto é, sendo dadas duas parametrizações $r_1 : [a,b] \to C$ e $r_2 : [c,d] \to C$ de uma mesma curva em $\mathbb{R}^n$ tais que $r_1 = r_2 \circ \varphi$, com $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ de classe $C^1([a,b])$ e $\varphi' \neq 0$ aí, então $\int_C f ds$ não muda de valor, sendo f um campo escalar e ds o elemento de arco correspondente.

7. Calcule
$$\int_C (2 + x^2 y) ds,$$
   onde C denota a metade superior da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, parametrizada como
   (a) $r_1(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0,\pi]$;
   (b) $r_2(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)),\ t \in [0,\pi]$;
   (c) $r_3(x) = (x, \sqrt{1-x^2}),\ x \in [-1,1]$;

8. Calcule os seguintes integrais de linha:

   (a) $\int_C x ds$, onde $C : r(t) = (t, t^2),\ t \in [0, 1]$;

   (b) $\int_C x dy$, onde $C : r(t) = (e^t, 1, 1),\ t \in [0, 1]$;

   (c) $\int_C x dy - y dx$, onde $C : r(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;