Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 2: *Funções vectoriais de variável real*

---

1. Seja $A(t)$ uma matriz $m \times n$ e denote-se $A(t) = (A_{ij}(t))$. Suponha-se adicionalmente que $A_{ij}(t)$ é uma função diferenciável para todos os i, j e assim sendo faz sentido definir $A'(t) = (A'_{ij}(t))$. Uma matriz A com tal propriedade (i.e., em que todas as suas entradas são funções diferenciáveis) designa-se por *matriz diferenciável*.

   Sendo $A(t)$ uma matriz $m \times n$ e $B(t)$ uma matriz $n \times p$, ambas matrizes diferenciáveis, prove que
$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

2. Se possível, encontre os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{|x|}{x}, \sin x/x, \cos x\right)$;

   (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{|x|}, \sec x, e^x\right)$;

   (c) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+4}, x+7, \frac{\tan 4x}{5x}\right)$;

   (d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}, \frac{\sin x^2}{x}\right)$.

3. Encontre o valor de $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}, x^2+2x-1, \frac{x^2-4}{x-2}\right)$.

4. Considere que $r(t) = \left(4+(t-1)^2, \sqrt{t^2+1}(t-1)^3, \frac{(t-1)^3}{t^5}\right)$ descreve a posição de um objecto em $\mathbb{R}^3$ como uma função de t onde t é medido em segundos e $r(t)$ é medido em metros. Será que o objecto tem em algum momento velocidade nula? Em caso afirmativo, encontre o valor de t no qual isto ocorre e o ponto de $\mathbb{R}^3$ no qual a velocidade é nula.

5. Seja $r(t) = (\sin 2t, t^2, 2t+1)$, para $t \in [0,4]$. Encontre a recta tangente à curva parametrizada por r no ponto $r(2)$.

6. Seja $r(t) = (t, \sin t^2, t+1)$, para $t \in [0,5]$. Encontre a recta tangente à curva parametrizada por r no ponto $r(2)$.

7. Seja $r(t) = (\sin t, t^2, \cos(t^2))$, para $t \in [0,5]$. Encontre a recta tangente à curva parametrizada por r no ponto $r(2)$.

8. Seja $r(t) = (\sin t, \cos(t^2), t+1)$, para $t \in [0,5]$. Encontre a velocidade quando $t = 3$.

9. Seja $r(t) = (\sin t, t^2, t+1)$, para $t \in [0,5]$. Encontre a velocidade quando $t = 3$.

10. Seja $r(t) = (t, \ln(t^2+1), t+1)$, para $t \in [0,5]$. Encontre a velocidade quando $t = 3$.

11. Suponha que um objecto tem a posição $r(t) \in \mathbb{R}^3$ onde r é diferenciável e suponha também que $||r(t)|| = c$, onde c é uma constante.

(a) Justifique que esta condição não obriga a que $r(t)$ seja uma constante.

(b) Mostre que $r'(t) \cdot r(t) = 0$. Ou seja, a velocidade é sempre perpendicular ao vector de posio do deslocamento.

12. Prove

$$(f \times g)'(t) = f(t) \times g'(t) + f'(t) \times g(t)$$

usando a descrição das componentes do produto vectorial.

13. Uma curva de Bézier em $\mathbb{R}^n$ é uma função vectorial da forma

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k (1-t)^{n-k} t^k$$

onde $\binom{n}{k}$ são os os coeficientes binomiais e x_k são $n+1$ pontos em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $y(0) = x_0$, $y(1) = x_n$ e encontre $y'(0)$ e $y'(1)$. Note que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,, \qquad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n\,.$$

Curvas deste tipo possuem um papel importante em vários programas de computador.

14. Suponha que $r(t)$, $s(t)$ e $p(t)$ são três funções diferenciáveis em t, possuindo valores em $\mathbb{R}^3$. Encontre uma fórmula para $(r(t) \times s(t) \cdot p(t))'$.

15. Se $r'(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$, mostre que existe um vector constante c tal que $r(t) = c$ para todo $t \in (a, b)$.

16. Se $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in (a, b)$ e F é contínua em $[a, b]$, mostre que $\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$.

17. Verifique que se $w \times u = 0$ para todo u, então $w = 0$.

18. Considere que $u \neq 0$ e $v \cdot u = 0$. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: Se $w \times u = v$ e $w_1 \times u = v$ então $w_1 = w$.

19. Considere o problema de ODE (vectorial) $v' + rv = c$ com condição inicial $v(0) = v_0$, onde $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ denota o vector velocidade de um dado corpo, m representa a sua massa, $r = k/m \in \mathbb{R}$, sendo k a constante para a resistência do ar, e $c = f/m : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ denota a aceleração desse corpo quando submetido à acção de uma força f (segunda lei de Newton).

(a) Mostre que a solução deste problema é dada por $v(t) = (v_0 - \frac{c}{r})e^{-rt} + \frac{c}{r}$.

(b) Argumente, recorrendo à segunda lei de Newton, que esta é a equação que modela a velocidade v de um corpo sujeito a uma resistência do ar proporcional à velocidade e a uma força exterior f (por exemplo, a da gravidade).

(c) Existe uma velocidade terminal? Se sim, qual é ela?

(d) Sabendo que a resistência do ar é proporcional à velocidade, mas desconhecida, como obteria essa constante de proporcionalidade (admitindo que conhece os restantes parâmetros)?

20. Suponha que um objecto com a massa de 5 kilogramas é sujeito a uma força dependente do tempo, $F(t) = e^{-t}i + \cos(t)j + t^2k$ kilogramas metro por seg^2. Suponha adicionalmente que no tempo $t = 0$ o objecto se encontra no ponto $(0, 1, 1)$ metros e que a sua velocidade inicial nesse momento é $v = i+j-k$ metros por segundo. Indique a posição do objecto à custa de uma função de t.

21. Um canhão é disparado numa vasta planície com um ângulo θ em relação ao chão. A velocidade da bola quando sai da boca do canhão é conhecida e vale s metros por segundo. Desprezando a resistência do ar, encontre uma fórmula que descreva até que posição é que a bola vai antes de bater no chão. Mostre que o alcance máximo da bola do canhão é obtido quando $\theta = \pi/4$.

22. Suponha que no contexto da questão 21 a massa da bola do canhão é de 10 kilogramas e sofre uma força da resistência do ar de $0.01v$ Newtons, onde v é a velocidade em metros por segundo. A aceleração da gravidade é 9.8 metros por seg^2. Suponha adicionalmente que a velocidade é de 100 metros por segundo. Encontre a fórmula para o deslocamento $r(t)$ da bola do canhão. Supondo que o ângulo de elevação é de $\pi/4$, use uma calculadora ou outro meio para estimar o tempo gasto até que a bola do canhão atinja o chão.

23. Mostre que a primeira lei de Newton pode ser obtida da segunda lei.

24. Suponha que um objecto se move no espaço tridimensional de tal modo que a única força a actuar no objecto é direccionada para um único ponto fixo no espaço tridimensional. Verifique que o movimento do objecto se encontra num plano. **Sugestão:** Seja $r(t)$ a posição do objecto em relação ao ponto fixo. Então a força que actua no objecto tem de ter a forma $g(r(t))r(t)$ e, pela segunda lei de Newton, tal é igual a $mr''(t)$. Assim,

$$mr'' \times r = g(r)r \times r = 0.$$

Argumente agora que $r'' \times r = (r' \times r)'$, mostrando que $r' \times r$ tem de ser igual a um vector constante, z. O que pode ento ser dito sobre z e r?