Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

Folha 11: *Mudança de coordenadas em integração*

---

1. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$, onde $R > 0$. Calcule $\int\int_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.
2. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$. Calcule $\int\int_D \cos(9x^2 + 9y^2) dxdy$.
3. Determine o volume do sólido delimitado por
   (a) $z = 5 - x^2 - y^2$ e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
   (b) $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$.
4. O volume ocupado por um gelado num cone de gelado é descrito, em coordenadas esféricas, por $\rho \in [0, 10]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ (contado a partir do pólo Norte) e $\theta \in [0, 2\pi]$. Sendo as unidades dadas em centímetros, determine o volume ocupado pelo gelado.
5. Uma esfera de raio 9 é formada por um material de densidade
   $$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
   É retirado o topo da esfera, acima do plano de equação $z = 2$. Qual a massa da região que sobra?
6. Uma esfera de raio 3 cm é perfurada, sendo que o furo realizado tem um diâmetro de 2 cm e está centrado no eixo dos $z's$. Qual o volume da parte que sobra da esfera?
7. Mostre que o seguinte integral (impróprio de 1^a espécie) satisfaz
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$
   Sugestão: use o resultado do exercício 1
8. A função gama é definida como $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Mostre que se tem então $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
9. A função beta (ou *integral de Euler de 2^a espécie*) é definida como
   $$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$
   para $p, q > 0$. Verifique que se tem então $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$.