Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere a curva C em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ para $0 \leq t \leq \pi$.

   (a) Há algum ponto da curva onde a velocidade dada por esta parametrização seja nula? Justifique.

   (b) Em que ponto do espaço a tangente à curva é paralela ao plano de equação $\sqrt{3}x + y = 4$?

2. Suponha que o campo magnético de um fio eléctrico rectilínio é dado por

$$H(x) = \frac{1}{\|x\|^2 - (\mathrm{k} \cdot x)^2}(\mathrm{k} \times x),$$

   onde $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, sendo que k é dado por $(0, 0, 1)$.

   (a) Indique o domínio de definição de H.

   (b) Estude a diferenciabilidade deste campo magnético nos pontos interiores do seu domínio e, em caso de diferenciabilidade, determine a sua derivada.

3. Para $f(x, y) = axye^{x+y}$, onde $a \neq 0$ é um parâmetro fixo, identifique e classifique os seus pontos de estacionariedade.

4. (a) Calcule o seguinte integral iterado:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx.$$

   (b) O integral iterado anterior representa o volume da intersecção de dois sólidos geométricos simples. Diga, justificando, de que sólidos geométricos se trata, descrevendo-os também analiticamente.

2^{a} parte

5. Determine $\int_\Gamma (2xy+z^2)dx + (x^2+z)dy + (y+2xz)dz$, onde Γ é a circunferência $x^2+y^2=4$ situada no plano $z=2$ e percorrida no sentido directo.

   [**Sugestão:** Pode usar o Teorema de Stokes (ver formulário) com $\partial S = \Gamma$ e S a superfície parametrizada por $r(u,v)=(u,v,2)$, para (u,v) obedecendo a $u^2+v^2 \leq 4$.]

6. (a) Sejam x ponto de acumulação de um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^p$ e $f,g : D \to \mathbb{R}^q$. Suponha que $\lim_{y\to x} f(y) = K$ e $\lim_{y\to x} g(y) = L$. Mostre que, então, $\lim_{y\to x} f(y)\cdot g(y) = K\cdot L$.

   (b) Sejam x, D e f como na alínea anterior e h uma função com valores num $\mathbb{R}^n$ e contínua numa vizinhança de K. Mostre que $\lim_{y\to x}(h\circ f)(y) = h(K)$.

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

coordenadas esféricas: $x=\rho\cos\theta\sin\varphi$; $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$; $z=\rho\cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_R \mathrm{div}F\,dV$, onde $\mathrm{div}F = \nabla\cdot F$

T. Stokes: $\displaystyle\int_{\partial S} F\cdot dR = \iint_S \mathrm{rot}F\cdot\hat{n}\,dA$, onde $\mathrm{rot}F = \nabla\times F$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 2; 2.(a) 1; (b) 3; 3. 4; 4.(a) 2; (b) 2; 5. 4; 6.(a) 3; (b) 1