Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

exame final Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere a função f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0\,, & x \neq y \\ x^2\,, & x = y \end{cases} .$$

   (a) Diga, justificando, se f é ou não contínua em $(0,0)$.

   (b) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e que f é diferenciável em $(0,0)$.

2. Considere o conjunto de todos os rectângulos de lados paralelos aos eixos coordenados e inscritos na elipse de equação $4x^2 + y^2 = 4$.

   (a) Justifique que existe um máximo para os valores das áreas desses rectângulos.

   (b) Determine, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, esse valor máximo.

3. Considere a curva C parametrizada por $r(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,, onde a e b são constantes positivas dadas. Calcule o integral de linha $\int_C f\,ds$ do campo escalar $f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$ relativamente ao comprimento de arco.

4. Considere as superfícies S_1 e S_2 dadas respectivamente pelas equações $2z = x^2+y^2$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (a) Mostre que se intersectam na origem das coordenadas e na circunferência $x^2 + y^2 = 4 \wedge z = 2$.

   (b) Calcule a área da porção da superfície S_1 exterior ao cone delimitado por S_2.

2ª parte

5. Determine o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ através da superfície que delimita o sólido $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

   [**Obs.:** Pretende-se o fluxo de dentro para fora do sólido, i.e., considera-se que os vectores normais à superfície apontam sempre para fora do sólido.]

6. Sejam U um aberto em $\mathbb{R}^n$, V um aberto em $\mathbb{R}^p$, $f : V \to \mathbb{R}^q$ e $g : U \to \mathbb{R}^p$ tal que $g(U) \subset V$. Suponha que, para um dado $x \in U$, g é diferenciável em x e f é diferenciável em $g(x)$. Prove que $f \circ g$ é diferenciável em x e que $D(f \circ g)(x) = Df(g(x))\, Dg(x)$.

   [**Sugestão:** pode assumir como garantido que, nas condições dadas, $o(g(x+v) - g(x)) = o(v)$.]

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$; $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_R \mathrm{div}F\,dV$, onde $\mathrm{div}F = \nabla\cdot F$

T. Stokes: $\displaystyle\int_{\partial S} F\cdot dR = \iint_S \mathrm{rot}F\cdot\hat{n}\,dA$, onde $\mathrm{rot}F = \nabla\times F$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 3; 2.(a) 1; (b) 3; 3. 3; 4.(a) 1; (b) 3; 5. 4; 6. 4