Resolução do 2º teste de A.M. III

(com excepção da questão 6)

1ª parte:

1. (a) Ponto de estacionaridade de uma função diferenciável $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com D aberto, é todo o ponto $x \in D$ tal que $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = 0$.

(b) $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$; $D = \mathbb{R}^n$ aberto; f é diferenciável no seu domínio (é função polinomial).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Assim, são três os pontos de estacionaridade de f:

$(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$

Como f é de classe C^2, podemos usar um resultado das aulas para classificar estes pontos.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz hessiana)}$$

Podemos ir pelo processo do cálculo dos valores próprios ou, como estamos num caso de função de duas variáveis, usar um corolário desse processo:

$\det Hf(0,0) = -16 < 0$, logo $(0,0)$ é ponto de sela;

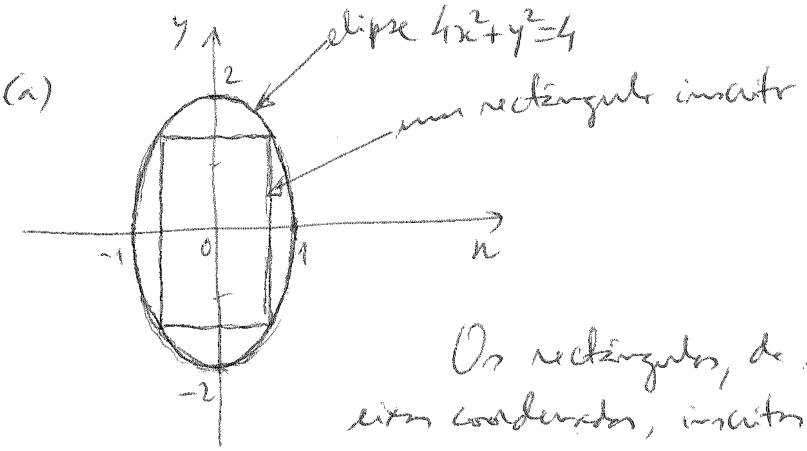
$\det Hf(1,1) = 48 - 16 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -4 < 0$, logo

$(1,1)$ é maximizante local;

$\det Hf(-1,-1) = 48 - 16 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -4 < 0$, logo

tb $(-1,-1)$ é maximizante local.

2. (a)



Os rectângulos, de lados paralelos aos eixos coordenados, inscritos na elipse são determinados pelas coordenadas (x,y) de cada ponto da elipse no 1º quadrante: para cada um desses pontos forma-se um rectângulo de dimensões $2x$ e $2y$, de modo que a respectiva área vale $4xy$ e o par (x,y) obedece a $4x^2+y^2=4$.

Assim, pretende-se maximizar a função $f(x,y):=4xy$ no conjunto definido por $4x^2+y^2=4 \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0$, ou seja, na parte da elipse que está no 1º quadrante, que é um conjunto limitado e fechado. Sendo f contínua (por ser polinomial) sabemos que atinge máximo (e mínimo) em tal conjunto.

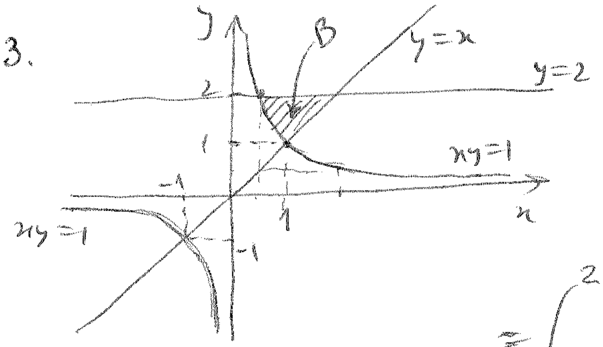
(b) $f(x,y):=4xy$ sujeita à restrição $g(x,y)=0$, para $g(x,y):=4x^2+y^2-4$, para $x,y\geq 0$. Mas excluímos desde já os pares (x,y) onde $x=0$ ou $y=0$, os quais, claramente, não dão origem ao máximo. Assim, o máximo pode-se ser determinado pela aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange a $f(x,y)$ com a restrição $g(x,y)=0$ no aberto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \wedge y>0\}$, atendendo tb a que tanto f como g são de classe C^1 neste aberto (e a que $\nabla g(x,y)$ não se anula nele).

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = \lambda 8x \\ 4x = \lambda 2y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = 8\lambda xy \\ 16x^2 = 8\lambda xy \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ 2x = \lambda y \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \lambda = 1 \\ 4x^2 + 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Havendo só uma solução, o par $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ dá origem ao máximo absoluto: $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = 4$.

3.



(a) A área de B é

$$\iint_B 1 \, dx dy,$$

$$= \int_1^2 \int_{1/y}^{y} 1 \; dx \, dy =$$

C.A.: $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases}$

$$= \int_1^2 \left[x \right]_{x=\frac{1}{y}}^{x=y} dy = \int_1^2 y - \frac{1}{y} \, dy =$$

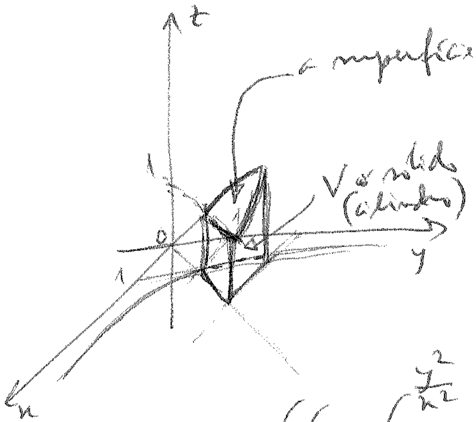
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ \text{—} \end{cases}$

$$= \left[\frac{y^2}{2} - \ln y \right]_1^2 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2} - \ln 2$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(b)

superfície no topo pretende representar $z = \frac{y^2}{x^2}$.



Volume é

$$\iiint_V 1 \, dx dy dz,$$

$$= \iint_B \int_0^{\frac{y^2}{x^2}} 1 \; dz \, dx \, dy = \int_1^2 \int_{1/y}^{y} \frac{y^2}{x^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{y^2}{x} \right]_{x=1/y}^{x=y} dy = \int_1^2 -y + y^3 \, dy = \left[-\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_1^2 =$$

$$= -2 + 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

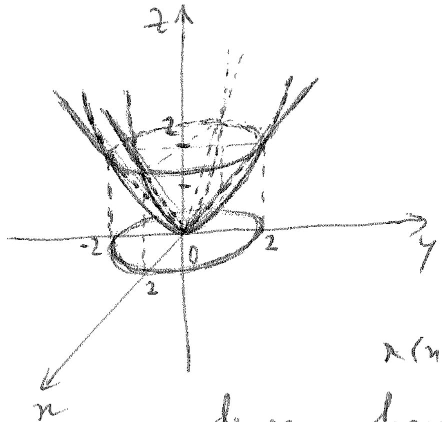
Obs.: Em ambas as alíneas, os conjuntos onde se integra pertencem ao tipo de conjuntos que permitem o cálculo do integral através de integrais iterados.

4. (a)
$$\begin{cases} 2z = x^2+y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = x^2+y^2 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = z^2 \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \vee z=2 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

Portanto, S_1 e S_2 intersectam-se em $(0,0,0)$ e na circunferência $x^2+y^2=4 \wedge z=2$.

(b)



A porção de superfície em causa projecta-se no círculo $x^2+y^2=4$ no plano xOy e pode ser parametrizada por $r(x,y) = (x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2))$. Tratando-se de uma função injectiva e sup. regular, a fórmula da área é

$$\iint_{x^2+y^2=4} \|r_x \times r_y\| \, dx\,dy .$$

C.A.: $r_x = (1,0,x)$; $r_y = (0,1,y)$;

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} = (-x,-y,1);$$

$$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{x^2+y^2+1}$$

Assim, o integral duplo em causa vem, mudando para coordenadas polares,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta ,$$

$$= 2\pi \left[\tfrac{1}{3}(r^2+1)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2\pi}{3}\left(5^{3/2}-1\right)$$

2ª parte

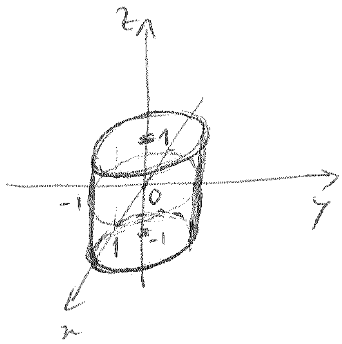
5. O fluxo em causa é, por definição, dado por

$$\iint_S F\cdot\hat{n}\, dA ,$$

onde S é a superfície que delimita o sólido B e se toma uma parametrização sua de tal modo que os vectores normais à superfície apontem para fora do sólido.

Sendo F de classe C^1 (é polinomial em cada coordenada) e estando o sólido B nas condições consideradas no Teorema da divergência, este permite calcular o fluxo indicado em causa através de

$$\iiint_B \nabla\cdot F \, dx\,dy\,dz ,$$



$$= \iiint_B y^2+x^2+0 \, dx\,dy\,dz$$

mudança para coordenadas cilíndricas $\rightarrow$

$$= \iint_{\substack{r\in[0,1] \\ \theta\in[0,2\pi)}} \int_{-1}^{1} r^2\cdot r \, dz\,dr\,d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^3\, dr = \pi\left[r^4\right]_0^1 = \pi$$

Uma maneira alternativa de resolver o problema seria fazer o cálculo directo do integral de superfície que dá o fluxo. Havendo falta de regularidade nas "arestas" do cilindro, tal cálculo deveria dividir-se em três partes, correspondentes à superfície lateral do cilindro, ao topo e ao fundo.

- Cálculo relativo à superfície lateral:

uma possível parametrização dessa superfície é

$$r(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad \text{em} \quad [0,2\pi[\times[-1,1] .$$

$$r_\theta \times r_z = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0);$$

tratando-se de um vector que aponta sempre para fora do sólido, podemos usar esta parametrização (que, além de mais, é injectiva e de classe C^1) para se calcular a parte correspondente do fluxo:

$$\iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} (\cos\theta \sin^2\theta, \cos^2\theta \sin\theta, \sin\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta \, dz\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \sin^2\theta - \sin^4\theta \, d\theta = 4\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\, d\theta - 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)^2 d\theta$$

$$= 4\pi - 2\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\pi - 0 - 2\pi + 0 - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\theta)\, d\theta$$

$$= 2\pi - \pi - 0 = \pi$$

- cálculos relativos ao topo e ao fundo:

Uma possível parametrização para o topo é

$$r_1(x,y) = (x, y, 1) \quad \text{em} \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

$$r_{1x} \times r_{1y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1);$$ tratando-se de vector que aponta para fora do sólido, podemos usar esta parametrização (que, além de mais, é injectiva e de classe C^1) para se calcular a parte correspondente do fluxo.

Uma possível parametrização para o fundo é

$$r_2(x,y) = (x,y,-1) \quad \text{em} \quad x^2+y^2 \le 1 .$$

$$r_{2x} \times r_{2y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$; como, neste caso,

a normal à superfície aponta para o interior do sólido, uma parametrização adequada poderá ser

$$r_3(x,y) = (y,x,-1) \quad \text{em} \quad x^2+y^2 \le 1 ;$$

de facto, neste caso $r_{3x} \times r_{3y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (0,0,-1)$ aponta para o exterior do sólido.

A soma das contribuições para o fluxo referentes ao topo e ao fundo é, então,

$$\iint_{x^2+y^2 \le 1} (xy^2, x^2y, y) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy + \iint_{x^2+y^2 \le 1} (yx^2, y^2x, x) \cdot (0,0,-1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} y\, dx\, dy + \iint_{x^2+y^2 \le 1} -x\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta \quad \leftarrow \text{mudança para coordenadas polares}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta - \int_0^{2\pi} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0.$$

Adicionando ao cálculo do fluxo relativo à superfície lateral, obtém-se, tal como na pág. 5, o valor π para o cálculo do fluxo total.

6. (Ver apontamentos das aulas).

A. [signature]
23-01-2008