1ª parte:

1. (a) Ser de classe C^1 significa a(s) derivada(s) de 1ª ordem existirem e serem contínuas.

Sabemos que as derivadas de funções vectoriais existem se e só se existem as derivadas das suas funções coordenadas. Como estas são

$$e^{-t}, \quad \cos t \quad e \quad 3 \sin t,$$

funções que sabemos, de Anál. Mat. I, serem continuamente diferenciáveis, então fica justificado que $\vec{r}$ é de classe C^1, já que a continuidade de $\frac{d\vec{r}}{dt}$ equivale à continuidade simultânea de $\frac{de^{-t}}{dt}, \frac{d\cos t}{dt}, \frac{d(3\sin t)}{dt}$, de acordo com o que foi dado nas aulas (tem-se mesmo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \left(\frac{de^{-t}}{dt}, \frac{d\cos t}{dt}, \frac{d(3\sin t)}{dt} \right)).$$

(b) A curva intersecta o plano $x=1$ quando $e^{-t}=1$, ou seja, quando $t=0$. Nesse ponto (isto é, em $(1,1,0)$) a velocidade é dada por $\vec{r}\,'(0)$. Ora $\vec{r}\,'(t) = (-e^{-t}, -\sin t, 3\cos t)$, logo $\vec{r}\,'(0) = (-1, 0, 3)$.

(c) A recta pedida passa pelo ponto $(1,1,0)$ e tem a direcção de $(-1,0,3)$, vector tangente à curva naquele ponto. Assim, $R(t) = (1,1,0) + t(-1,0,3)$, $t \in \mathbb{R}$, dá-nos a equação vectorial dessa recta.

2. (a) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^4 m^4 x^4}{(x^2+m^4x^4)^3} =$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{\cancel{x^6}\cdot x^2 \cdot m^4}{\cancel{x^6}(1+m^4x^2)^3} = 0$$

$\Rightarrow x\to 0$

(b) O resultado anterior não garante que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ seja 0, pois trata apenas do limite segundo um certo tipo especial de conjuntos (rectas). Na verdade, calculando o limite segundo a parábola $x=y^2$ obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{y^8\cdot y^4}{(y^4+y^4)^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{\cancel{y^{12}}}{2^3\cdot \cancel{y^{12}}} = \frac{1}{8} \neq 0,$$

logo não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (a existir, teria que ser igual segundo qualquer conjunto de que $(0,0)$ seja ponto de acumulação, como é o caso das rectas $y=mx$ e da parábola $x=y^2$).

3. (a) As curvas em causa têm um aspecto esperado, atendendo ao que foi dado nas aulas (cf. ex. 3 e 7 da folha prática nº 4).

De qualquer modo, para $r=3(1+\sin\theta)$ temos

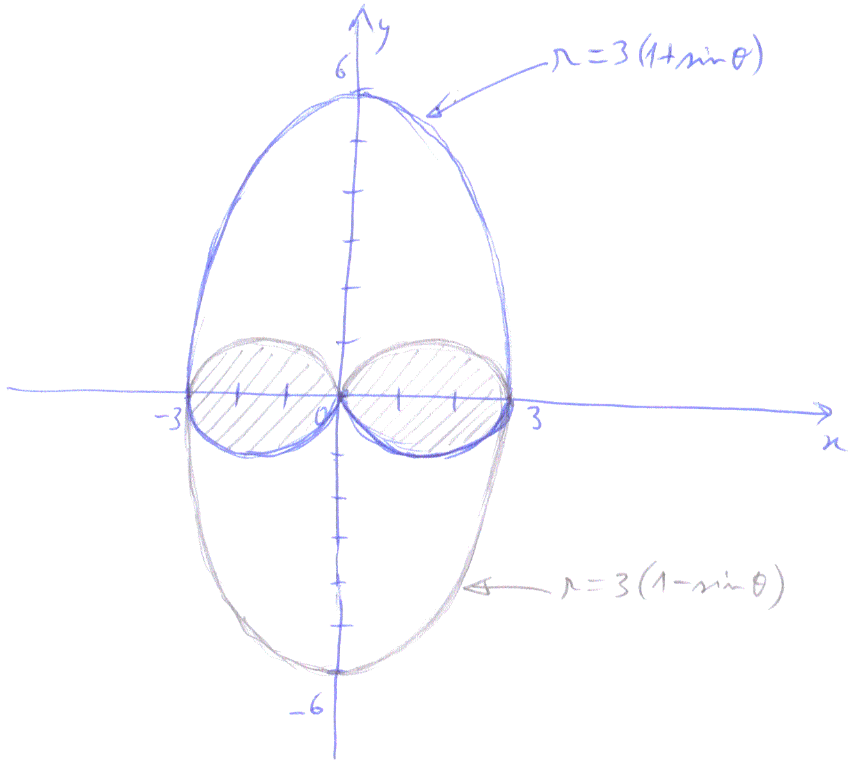
$\theta=0 \Rightarrow r=3$; $r=0 \Rightarrow \sin\theta=-1 \Leftrightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}$ (em $[0,2\pi]$);

Logo ← r cresce para $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$ e decresce para $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

$\left\{ \frac{dr}{d\theta}=3\cos\theta\right.$, positivo em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$, negativo em $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$;

e para $r=3(1-\sin\theta)$ temos que o seu valor em θ é o valor da anterior em $-\theta$ (neste caso, pertencente a $[-2\pi,0]$).

Observe-se, ainda, que para a 1ª equação se tem $r\left(\frac{\pi}{2}\right)=6$ e $r(\pi)=3$.



(b) A região que pertence simultaneamente ao interior das duas curvas, é a que está representada a sombreado na figura anterior. Atendendo à simetria exibida pelas curvas, a sua área vale 4 vezes a área da região determinada por $r=3(1-\sin\theta)$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, e o semi-eixo positivo dos xx:

$$4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3(1-\sin\theta))^2\,d\theta\,,$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\,(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$$

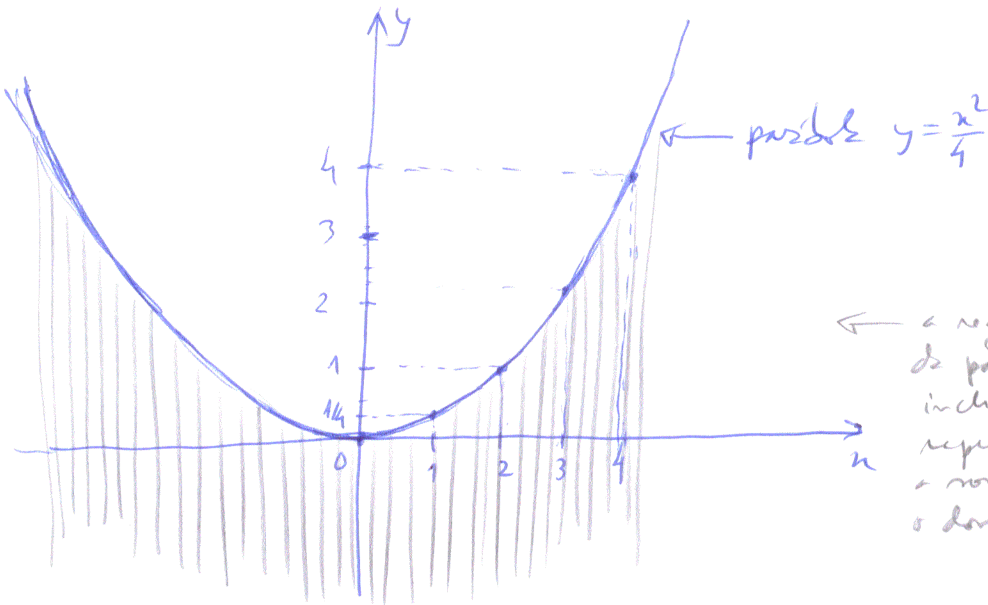
$$=18\,[\theta]_0^{\pi/2}+36\,[\cos\theta]_0^{\pi/2}+18\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$=9\pi-36+9\,[\theta]_0^{\pi/2}-\frac{9}{2}\,[\sin(2\theta)]_0^{\pi/2}$$

$$=9\pi-36+\frac{9\pi}{2}=\frac{27}{2}\pi-36$$

3. (a) As expressões que definem $\vec{f}$ fazem sentido desde que $\frac{x^2}{4}-y\geq 0$, ou seja, $y\leq\frac{x^2}{4}$. Assim, $D(\vec{f})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq\frac{x^2}{4}\}$.

Esboço de $D(\vec{f})$:



a região abaixo da parábola (com a inclusão desta), representada aqui a sombreado, é o domínio de $\vec{f}$.

(b) ~~A~~ A consideração dos pontos interiores de $D(\vec{f})$ exclui os pontos sobre a parábola $y = \frac{x^2}{4}$; ou seja, consideramos apenas os ~~para~~ (x,y) tais que $y < \frac{x^2}{4}$. Para tais pontos é possível calcular as derivadas parciais de $\vec{f}$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}x}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} \\ -\frac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}x}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} - \dfrac{-1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} \end{pmatrix}.$$

Como se trata de funções contínuas em (x,y) tal que $y < \frac{x^2}{4}$, então há um resultado dado nas aulas que nos garante a diferenciabilidade de $\vec{f}$ nesses pontos.

Quanto à derivada, sabemos então que é a transformação linear representada, na base canónica, pela matriz das derivadas parciais:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \dfrac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} & \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} \\ \\ -\frac{1}{2} + \dfrac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{4} - y}} \end{bmatrix}.$$

2ª parte:

Sobre esta parte, fazemos apenas breves observações (nós, os professores; os alunos teriam que apresentar os detalhes):

5. Este exercício é muito parecido com o ex. 24 da folha prática 2. Quem percebeu isso, não teria dificuldade em fazer o do teste.

6. Trata-se de um resultado provado nas aulas — consultar apontamentos das aulas.

A Caetano

22-11-2007