Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

exame de época especial Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x^2+y^2)}{x^3y+y^3x}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ k, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

   Averigue se existe algum valor de k para o qual f seja contínua na origem. Em caso afirmativo, diga qual é esse valor.

2. Um objecto com massa de 1 kilograma é sujeito a uma força dada, em cada instante, por $\vec{F}(t) = (t, t^2, \cos t)$ kilogramas metro por seg^2. Sabendo que no instante $t = 0$ o objecto se encontrava na origem do referencial, com uma velocidade inicial $\vec{v} = (0, 1/3, 0)$ metros por seg^2, determine o primeiro instante em que o objecto alcança a altura $z = 1/2$ metro.

3. Considere as superfícies S_1 e S_2 dadas, em coordenadas esféricas, respectivamente pelas equações $\rho = 2\sec\phi$ e $\rho = 4$.

   (a) Mostre que se intersectam na circunferência dada, em coordenadas cartesianas, por $x^2 + y^2 = 12 \ \wedge \ z = 2$.

   (b) Calcule o volume da porção da esfera delimitada por S_2 que se encontra acima do círculo correspondente à circunferência da alínea anterior.

4. Maximize $f(x,y,z) = 2\pi(x^2+y^2)z$ sujeita à condição $x^2+y^2+4z^2 \leq 4$.

2ª parte

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e seja $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, onde $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \neq 0\}$.

   (a) Determine a matriz de $Dg(r,\theta)$.

   (b) Escreva a matriz de $D(f \circ g)$ em termos do gradiente de f e da matriz de Dg.

(c) Resolva, em ordem ao gradiente de f, a equação determinada na alínea anterior, de modo a obter aquilo que se designa por expressão para o gradiente de f em coordenadas polares.

6. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que tanto f como g são diferenciáveis em t. Mostre que então também o produto interno $f \cdot g$ é diferenciável em t e que $(f \cdot g)'(t) = f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)$.

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$; $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_R \mathrm{div}F\,dV$, onde $\mathrm{div}F = \nabla\cdot F$

T. Stokes: $\displaystyle\int_{\partial S} F\cdot dR = \iint_S \mathrm{rot}F\cdot\hat{n}\,dA$, onde $\mathrm{rot}F = \nabla\times F$

Cotação:

1. 3; 2. 4; 3.(a) 1,5; (b) 2,5; 4. 4; 5.(a) 1; (b) 1; (c) 3; 6. 3.