Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2007/08**

1º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1ª parte

1. Considere a curva C em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (e^{-t}, \cos t, 3\sin t)$ para $-\pi \leq t \leq \pi$.

   (a) Justifique que se trata de uma parametrização de classe C^1.

   (b) Encontre a velocidade da parametrização no ponto em que a curva intersecta o plano $x = 1$.

   (c) Escreva uma equação para a recta tangente à curva no ponto referido na alínea anterior.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$.

   (a) Calcule, caso existam, os limites direccionais de f no ponto $(0,0)$, i.e., para cada $m \in \mathbb{R}$, o limite de f quando (x,y) tende para $(0,0)$ segundo a recta $y = mx$.

   (b) Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

3. (a) Esboce as curvas de equação (em coordenadas polares) $r = 3(1+\sin\theta)$ e $r = 3(1-\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

   (b) Determine a área da região que pertence simultaneamente ao interior das duas curvas.

4. Considere a função $\vec{f}$, vectorial de duas variáveis, dada por $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - y} \\ -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - y} \end{pmatrix}$.

   (a) Indique o domínio de definição desta função e esboce-o.

   (b) Estude a diferenciabilidade de $\vec{f}$ nos pontos interiores do seu domínio e, em caso de diferenciabilidade, indique também a respectiva derivada.

2ª parte

5. A lei de gravitação de Newton estabelece que a força de atracção gravitacional $\vec{F}$ exercida sobre um planeta pelo Sol é dada por $\vec{F} = -g\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$, sendo $\vec{r}$ o vector posição do centro do planeta (tomando como origem das coordenadas o centro do Sol), com $r = ||\vec{r}||$ e $\hat{r} = \vec{r}/r$, M a massa do Sol e m a massa do planeta. Mostre que a órbita do planeta se situa no plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$.

6. Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ um campo de forças e C uma curva suave em $\mathbb{R}^p$. Assumindo a regularidade que achar necessária, mostre que o trabalho $\int_C \vec{F} \cdot dR$ exercido por esta força sobre um objecto movendo-se sobre a curva C segundo uma dada orientação é independente da parametrização usada, desde que respeite essa orientação.

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

2ª lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$

área em coordenadas polares: $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b f(\theta)^2\,d\theta$

coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$; $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 2; (c) 1; 2.(a) 1,5; (b) 2; 3.(a) 1,5; (b) 2,5; 4.(a) 1; (b) 2,5; 5. 4; 6. 4