Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 8: *Derivação da composição de funções*

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes, calcule, nos interiores dos domínios de definição e por dois processos diferentes, as derivadas indicadas:

   (a) $\dfrac{dw}{dt}$ para $w = x^2y^2$ e $x = t^4$, $y = t^5$.

   (b) $\dfrac{dw}{dt}$ para $w = xy$ e $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

   (c) $\dfrac{dw}{dt}$ para $w = \arctan \frac{y}{x}$ e $x = \sin t$, $y = \cos t$.

   (d) $\dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $w = x^2 + y^2$ e $x = u^2v$, $y = (u+v)^3$.

   (e) $\dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $w = \sin x \cot y$ e $x = \arcsin(uv)$, $y = \arctan(uv)$.

   (f) $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w = u^2 + v^2$ e $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4t)}$, $v = \frac{1}{t} e^{-x^2/(2t)}$.

   (g) $J(g \circ f)$ para $g(u,v,w) = (u^w, \sin(v+w))$ e $f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$.

   (h) $J(g \circ f)$ para $g(u,v) = (u+v, uv, \ln v)$ e $f(x,y) = (\sin(x+y), e^x)$.

2. (*Derivação implícita*) Considere a seguinte

   Proposição: Seja (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se $F(x_0,y_0) = 0$, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ e se F_x, F_y forem contínuas numa vizinhança de (x_0,y_0), então existe, definida numa vizinhança de x_0 e com valores numa vizinhança de y_0, uma função f tal que $F(x, f(x)) = 0$. Diz-se, em tal caso, que $F(x,y) = 0$ define implicitamente y como função de x à volta de (x_0,y_0).

   Use este resultado e a regra de derivação das funções compostas para obter $\frac{dy}{dx}$ explicitamente em função de x e y em cada um dos seguintes casos:

   (a) $x^3 + y^3 = 6xy$. (b) $\cos(x-y) = xe^y$. (c) $x\cos y + y\cos x = 1$.

3. Considere a seguinte

   Proposição (*derivação sob o sinal de integral*)**:** Seja $f : [\alpha,\beta]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe em $]\alpha,\beta[\times]a,b[$ e pode estender-se por continuidade a uma função $g(t,u)$ contínua em $[\alpha,\beta]\times[a,b]$. Então a função $F(t) := \int_a^b f(t,u)\,du$ é continuamente diferenciável em $[\alpha,\beta]$ e $F'(t) = \int_a^b g(t,u)\,du$ (escrevendo-se vulgarmente que $\frac{d}{dt}\int_a^b f(t,u)\,du = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\,du$).

   Use este resultado, a regra de derivação dos integrais indefinidos e a regra de derivação das funções compostas para obter $F'(t)$ em cada uma das alíneas seguintes:

   (a) $F(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(u^2t)\,du,\ t > 0.$ (b) $F(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{u^2+t^2}\,du,\ t > 0.$

   (c) $F(t) = \displaystyle\int_{\cos t}^{\sin t} e^{-u^2}\,du.$