Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 7: *Diferenciabilidade e aproximação*

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes, após garantir a diferenciabilidade da função $z = f(x, y)$ no ponto em causa, indique o seu diferencial dz e a sua linearização $L(x, y)$ nesse ponto. Indique também uma equação para o plano tangente no correspondente ponto do gráfico da função.

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^3$ em $(1, 2)$. (b) $f(x, y) = x^2 + xy + 3x$ em $(0, 0)$.

   (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ em $(1, 1)$. (d) $f(x, y) = x^2 \sin y$ em $(0, \pi)$.

   (e) $f(x, y) = 3x + 7y + 1$ em $(1, 2)$ (f) $f(x, y) = x \tan(xy)$ em $(1, \pi)$.

   (g) $f(x, y) = \csc(x + y)$ em $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$. (h) $f(x, y) = \dfrac{-1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ em $(0, 1)$.

2. Mostre que o plano tangente a qualquer ponto do plano $z = ax + by + c$ é este mesmo plano.

3. Um depósito em forma de paralelepípedo mede 4 metros de altura e a sua base quadrada tem 2 metros de lado. Sabendo que as medidas foram obtidas com erro máximo de 10 cm, encontre os erros máximo $|\Delta V|$ e aproximado $|dV|$ para o volume do depósito.

4. O comprimento de um pêndulo foi medido como sendo $\ell = 1,5$ metros com erro máximo de 2 cm. O período do movimento de balanço do pêndulo foi medido como sendo $T = 2,5$ segundos com erro máximo de 0,1 s. O valor absoluto g da aceleração da gravidade está relacionado com o movimento de balanço do pêndulo através da fórmula
$$g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}.$$
   Tomando $\pi = 3{,}14$, calcule o valor de g relativamente a estas medições e uma estimativa para erro do resultado. Como procederia se quisesse levar em linha de conta o facto de o valor indicado para π também ser ele próprio aproximado?

5. Estude a diferenciabilidade em $(0, 0)$ das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. (b) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$. (c) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.