Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 5: *Limites e Continuidade*

---

1. Determine os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy$. (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} (x^2+y^2)$.

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,\pi)} x\cos y$. (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,2)} \sin(xy)$.

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y^2-x^2-4y^2+4}{yx-x-2y+2}$. (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y-x^2-4y+4}{xy^2-x-2y^2+2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\sin(x+y)+\sin(x-y)}$. (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

2. Mostre que os seguintes limites não existem, calculando os correspondentes limites segundo dois caminhos diferentes que produzam dois resultados diferentes:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$. (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^3+y^2}$. (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{\sin x}{x+y-\pi}$.

3. Considere a função dada por $f(x,y)=\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$. Determine o seu domínio de definição e diga, justificando, se a função tem limite quando (x,y) tende para $(0,0)$.

4. Determine os conjuntos de pontos de continuidade das seguintes funções:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$. (b) $f(x,y)=\ln x\,\sec y$.

   (c) $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$. (d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

   (e) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ (f) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

5. Mostre que se g, função de uma variável, é contínua em $x=p$, então a função f, de duas variáveis, definida por $f(x,y)=g(x)$, é contínua em todos os pontos da forma (p,q), para qualquer $q\in\mathbb{R}$.

6. Considere o que se passa com as funções dadas pelas expressões $\frac{x-1}{x+y}$ e $\frac{y+1}{x+y}$ quando (x,y) tende para $(0,0)$ e conclua que é possível existir limite da soma de funções mesmo quando cada uma das funções parcela não tem limite.