

Folha 4: Domínios e gráficos

1. Em cada uma das alíneas seguintes, encontre o domínio de definição da função em causa, esboce-o e determine se é aberto, fechado, limitado ou conexo (por arcos):
 - (a) $f(x, y) = (1 - 2x + y)^{1/2}$.
 - (b) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
 - (c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.
 - (d) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2y)}{\ln(4-x^2-y^2)}$.
 - (e) $f(x, y) = y^x$.
 - (f) $f(x, y) = \sqrt{x} \ln(1 - y)$.
 - (g) $f(x, y) = \ln|x^2 - y^2|$.
 - (h) $f(x, y) = \arcsin(x - y)$.
2. Com a ajuda de um computador, esboce os gráficos das seguintes funções:
 - (a) $f(x, y) = y$.
 - (b) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.
 - (c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.
 - (d) $f(x, y) = \frac{\sin x}{1+x^2}$.
 - (e) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
3. A função $u(x, t) = \sin(x - t) + \sin(x + t)$ modela a forma de uma corda vibrante fixada em $x = 0$ e $x = \pi$. Esboce o gráfico de $u(x, t)$ como função de $x \in [0, \pi]$ para cada um de vários instantes t (por exemplo, $t = 0, 1, 2$). Após quanto tempo assume a corda a sua forma inicial?
4. A função $u(x, t) = (x - t)e^{-(x-t)^2}$ é um exemplo de uma *onda progressiva*. Esboce o gráfico de $u(x, t)$ no domínio da variável x para cada um de vários valores de t (por exemplo, $t = 0, 1, 2$). Por que razão se usará a designação de onda progressiva?
5. A função $u(x, t) = \frac{5}{9}e^{-t} \sin^2(\frac{\pi}{30}x)$ modela a temperatura em graus Celsius ao longo de um arame de 30 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas constantemente à temperatura zero. Esboce o gráfico de $u(x, t)$ como função de $x \in [0, 30]$ para cada um de vários instantes t (por exemplo, $t = 0, 1, 2$). O que acontece à temperatura do arame à medida que t aumenta? Que acontece quando t tende para infinito?
6. Considere uma função g de uma variável com domínio de definição $[a, b]$. Defina uma função de duas variáveis através de $f(x, y) = g(x)$. Qual o domínio de definição de f ? Determine se é aberto, fechado, limitado ou conexo (por arcos):
7. Considere que os domínios de definição de g e h são, respectivamente, $[a, b]$ e $[c, d]$. Qual o domínio de definição de $f(x, y) = g(x)h(y)$?