Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 2: *Derivadas e Primitivas*

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes, determine a velocidade e a aceleração (e os respectivos domínios de validade) da função vectorial indicada:
   (a) $\vec{r}(t) = (t^2, t^3, t^4)$. (b) $\vec{r}(t) = (t^{-1}, t^{-2}, t^{-3/2})$.
   (c) $\vec{r}(t) = (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t)$. (d) $\vec{r}(t) = (\tan t, \cot t, \csc t)$.
   (e) $\vec{r}(t) = (1, 1, \ln(\sec t))$. (f) $\vec{r}(t) = t^2\,\hat{\imath} + (\arctan t\,)\hat{\jmath}$.
   (g) $\vec{r}(t) = e^{-t}(\sin t, \cos t, t)$.

2. Mostre que se $\vec{r}, \vec{s} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ forem diferenciáveis em $t_0 \in [a,b]$, o mesmo sucede às funções em causa nas alíneas que se seguem, sendo as respectivas derivadas dadas pelas fórmulas aí indicadas:
   (a) $\frac{d(\vec{r}+\vec{s})}{dt}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) + \frac{d\vec{s}}{dt}(t_0)$.
   (b) $\frac{d(\alpha\vec{r})}{dt}(t_0) = \alpha\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) $\frac{d(f(t)\,\vec{r}(t))}{dt}|_{t=t_0} = f'(t_0)\vec{r}(t_0) + f(t_0)\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0), \quad \forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em t_0.
   (d) $\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{s})}{dt}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \cdot \vec{s}(t_0) + \vec{r}(t_0) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}(t_0)$.
   (e) $\frac{d(\vec{r}\times\vec{s})}{dt}(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \times \vec{s}(t_0) + \vec{r}(t_0) \times \frac{d\vec{s}}{dt}(t_0)$.

3. Mostre que se $f : [c,d] \to [a,b]$ é diferenciável em $t_0 \in [c,d]$ e se $\vec{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ é diferenciável em $f(t_0)$, então $\vec{r} \circ f$ é diferenciável em t_0 e $\frac{d(\vec{r}\circ f)}{dt}(t_0) = f'(t_0)\,\frac{d\vec{r}}{dt}(f(t_0))$.

4. Em cada uma das alíneas seguintes, determine a velocidade no instante indicado e esboce o respectivo vector no gráfico da curva em causa, colocando a origem do vector no ponto de tangência:
   (a) $\vec{r}(t) = (t^2, t^4), \quad t = 1$. (b) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t = \frac{\pi}{6}$.
   (c) $\vec{r}(t) = (e^t, e^- t), \quad t = 0$. (d) $\vec{r}(t) = (3t+1, 2t+3), \quad t = 2$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, determine a parametrização $\vec{r}(t)$ para o movimento do projéctil obedecendo às condições iniciais $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ dadas respectivamente para a posição e a velocidade. Determine depois o plano do movimento, a altura máxima e o respectivo instante, e o ponto de impacto e o respectivo instante:
   (a) $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ e $\vec{v}_0 = (1,2,64)$. (b) $\vec{r}_0 = (1,3,0)$ e $\vec{v}_0 = (72,38,65)$.
   (c) $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ e $\vec{v}_0 = (0,0,0)$. (d) $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ e $\vec{v}_0 = (72,38,65)$.

6. Suponha que um objecto, considerado como um ponto, descreve um movimento sujeito a uma aceleração constante dada por $(0,2,-9.8)$. Determine a trajectória e o plano do movimento sabendo que o objecto parte da posição $(0,0,0)$ com velocidade $(25,0,25)$.