Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 14: *Integrais de superfície*

---

1. Esboce as superfícies dadas pelas seguintes parametrizações e calcule as respectivas áreas:

   (a) $\vec{r}(u,v) = (u, v, 3u + 4v), \quad (u,v) \in [0,1]^2$.

   (b) $\vec{r}(u,v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u,v) \in [0,\pi] \times [0,1]$.

   (c) $\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \quad (r,\theta) \in [1,2] \times [0,\pi]$.

2. Em cada uma das seguintes alíneas, calcule o fluxo do campo vectorial F através da superfície S indicada:

   (a) $F(x,y,z) = (y, -x, 0)$; S dada na alínea (a) do exercício anterior.

   (b) $F(x,y,z) = (y, -x, z)$; S dada na alínea (b) do exercício anterior.

   (c) $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$; S dada na alínea (c) do exercício anterior.

3. Calcule, de duas maneiras diferentes, o fluxo de F através da fronteira ∂S de S:

   (a) $F(x,y,z) = (0,0,1)$; $S = [0,1]^3$.

   (b) $F(x,y,z) = (0,0,z)$; S entre $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$.

   (c) $F(x,y,z) = (x,y,z)$; S a esfera unitária centrada na origem.

4. Calcule usando o Teorema da divergência:

   (a) $\displaystyle\iint_{\partial S} x^2\,dx + y\,dy + z\,dz$; S entre $z = 2 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

   (b) $\displaystyle\iint_{\partial S} x\,dx + y\,dy + z\,dz$; S o tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

   (c) $\displaystyle\iint_{\partial S} x^3\,dx + y^3\,dy + z^3\,dz$; $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, calcule, de duas maneiras diferentes, o fluxo de rot$F$ através do parabolóide $\vec{r}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 1 - v^2)$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,1]$:

   (a) $F(x,y,z) = (y, -x, z)$. (b) $F(x,y,z) = (x+y, x-y, z)$. (c) $F(x,y,z) = (xy, yz, zx)$.

6. Repita o exercício anterior, mas agora para a superfície dada pela semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ (use a parametrização natural $\vec{r}(x,y)$, de modo a que as normais à superfície estejam a ser consideradas com o sentido para cima).

7. Use o Teorema de Stokes para calcular os seguintes integrais de linha (use para superfície o parabolóide do exercício 5 ou a semi-esfera do exercício 6):

   (a) $\displaystyle\oint_T y\,dx - x\,dy$; $\quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 0\}$.

   (b) $\displaystyle\oint_T y^2\,dx - x^2\,dy$; $\quad T$ como em (a).

   (c) $\displaystyle\oint_T xy\,dx + x\,dy$; $\quad T$ como em (a).