Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 13: *Integrais de linha*

---

1. Calcule os seguintes integrais de linha (relativos ao comprimento de arco):

(a) $\int_C x\, ds$, onde C é dada por $r(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$.

(b) $\int_C (x^2 + y^2) z\, ds$, onde C é dada por $r(t) = (\sin(3t), \cos(3t), 4t)$, $t \in [0,\pi]$.

(c) $\int_C (x^2 + yz)\, ds$, onde C é dada por $r(t) = (\sin(2t), \cos(2t), t)$, $t \in [0,\pi]$.

2. Em cada uma das seguintes alíneas, identifique o campo de vectores F em causa e calcule os integrais de linha sobre as curvas indicadas:

(a) $\int_C x\, dy$, onde C é dada por $r(t) = (e^t, 1)$, $t \in [0,1]$.

(b) $\int_C x\, dy - y\, dx$, onde C é dada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(c) $\int_C yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$; C dada por $r(t) = (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial (de força) F dado sobre um objecto percorrendo a curva C dada:

(a) $F(x,y) = (y, -x)$; C dada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

(b) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$; C dada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$; C dada por $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.

(d) $F(x,y,z) = (x,y,z)$; C dada por $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

4. Calcule os seguintes integrais de linha:

(a) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} x\, dx + y\, dy$. (b) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\, dx + x^2\, dy$.

(c) $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} x\, dx + y^2\, dy + z^3\, dz$. (d) $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$.

5. Use o Teorema de Green para calcular os seguintes integrais de linha:

(a) $\frac{1}{2}\oint_{\partial R} x\, dy - y\, dx$; $R = [0,1]^2$. (b) $\oint_{\partial D} x^2\, dy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

(c) $\oint_{\partial R} \sin(x^3)\, dx$; $R = [0,1]^2$. (d) $\oint_{\partial R} \sin(\pi y)\, dx$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$.

(e) $\oint_{\partial R} 2xy\, dx + x^2\, dy$; $R = [0,1]^2$. (f) $\oint_{\partial R} x^2\, dy - 2y\, dx$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 - x^2\}$.

6. Determine a área das superfícies delimitadas pelas seguintes curvas C:

(a) $C:\ \vec{r}(t) = (t^3 - t, t^2 - t)$, $t \in [0,1]$. (b) $C:\ \vec{r}(t) = (\sin(\pi t), t^3 - t)$, $t \in [0,1]$.

(c) $C:\ \vec{r}(t) = (\sin(2t), \sin(3t))$, $t \in [0,\pi]$. (d) $C:\ \vec{r}(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.