Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 11: *Integrais duplos*

---

1. Identifique cada um dos seguintes integrais iterados como sendo de tipo I ou de tipo II e efectue o cálculo:

   (a) $\int_0^1 \int_0^y x^2 + y^2 \, dx \, dy$. (b) $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} dy \, dx$. (c) $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos x \, dy \, dx$.

   (d) $\int_0^\pi \int_0^x \sin y \, dy \, dx$. (e) $\int_0^3 \int_y^1 e^x \, dx \, dy$. (f) $\int_1^2 \int_0^{y^2} \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$.

2. Em cada uma das alíneas seguintes, esboce a região R, determine o seu tipo e calcule o volume do sólido compreendido entre R e o gráfico de $f(x, y)$:

   (a) $R = [0, 1]^2$; $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, x^2]\}$; $f(x, y) = 3x + 2y$.

   (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x \in [-y, y]\}$; $f(x, y) = xy$.

   (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y\}$; $f(x, y) = e^{x+y}$.

3. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o volume do sólido compreendido entre os gráficos das funções dadas sobre as regiões limitadas pelas curvas dadas:

   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 0$; $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = 0$; $y = 0$, $y = 1$, $x = y$, $x = 1$.

   (c) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x^2 + y^2$; $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

   (d) $f(x, y) = \sin x$, $g(x, y) = 1$; $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = x$.

4. Calcule os seguintes integrais:

   (a) $\int_0^1 \int_x^1 \cos(\pi y^2) \, dy \, dx$. (b) $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$.

   (c) $\int_0^1 \int_{\arcsin x}^{\pi/2} x \csc y \, dy \, dx$. (d) $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x + y} \, dx \, dy$.

5. Calcule $\iint_R xy \, dxdy$, onde R é a região delimitada pelas curvas $x = -1$, $y = -1$, $x = y^2$, $x = 1$ e $y = 1 + x^2$.

6. Calcule os seguintes integrais iterados usando coordenadas polares:

   (a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$. (b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$.

   (c) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{9 - x^2 - y^2} \, dy \, dx$. (d) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx$.

   (e) $\int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$. (f) $\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dy \, dx$.

7. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões (dadas em coordenadas polares):

   (a) $r = 5$, $\theta \in [0, 2\pi]$. (b) $r = \sin(3\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi/3]$. (c) $r = 1 + \cos(2\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.

   (d) $r = \sin \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. (e) $r = \pi\theta - \theta^2$, $\theta \in [0, \pi]$. (f) $r = \sin \theta + \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$.