Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

Folha 10: *Máximos e mínimos*

---

1. Determine os extremos locais e os pontos de sela das seguintes funções:
   (a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. (b) $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y$.
   (c) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y$. (d) $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$.
   (e) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$. (f) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$.
   (g) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$. (h) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - 2y$.
   (i) $f(x,y) = \sin x + \cos y$. (j) $f(x,y) = x \ln x + y \ln y$.
   (k) $f(x,y) = e^{2x} \cos y$. (l) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$.

2. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o ponto da superfície $z = f(x,y)$ dada que está mais perto do ponto indicado:
   (a) $z = x - y + 1, \quad (0,0,0)$. (b) $z = x + 2y + 3, \quad (0,0,0)$.
   (c) $z = x + y, \quad (2,2,1)$. (d) $z = (x-1)^2 + y^2, \quad (0,0,0)$.

3. Determine os extremos absolutos das seguintes funções f nos domínios D indicados:

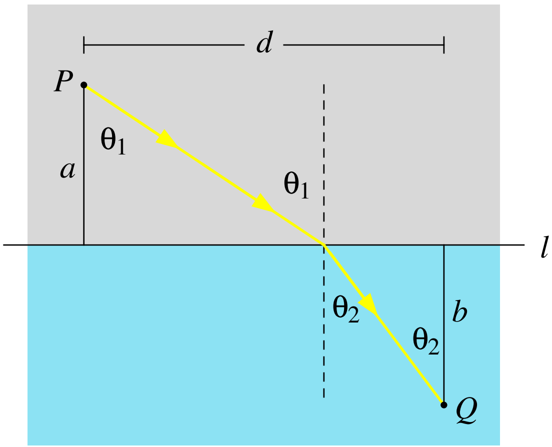
   (a) $f(x,y) = xy(3 - x - y), \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D = [0,1] \times [0,2]$.
   (c) $f(x,y) = x + y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$.
   (d) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq -1\}$.

4. Até onde consegue ir, com as técnicas introduzidas nas aulas, no problema da determinação das dimensões de uma caixa em forma de paralelepípedo rectângulo de 1 dm^3 de volume com menor área de superfície?

5. Em cada uma das alíneas seguintes, determine os extremos absolutos da função f sujeita à(s) condição(ões) dada(s):

   (a) $f(x,y) = 3x + 2y$, sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.
   (b) $f(x,y) = x - 2y$, sujeita a $x^2 + y^2 = 25$.
   (c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.
   (d) $f(x,y) = x^4 + y^2$, sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.
   (e) $f(x,y) = \sin(xy)$, sujeita a $x^2 + y^2 = 1$.
   (f) $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeita a $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.
   (g) $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeita a $x^2 + xy = 2$.
   (h) $f(x,y,z) = x + yz$, sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z^2 = x^2 + y^2$.
   (i) $f(x,y,z) = xyz$, sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $xy + yz + zx = 1$.
   (j) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, sujeita a $x - y + z = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$.

6. A lei da refracção da luz baseia-se no princípio físico de que esta se desloca sempre de modo a gastar o menor tempo possível no seu percurso, propagando-se a uma velocidade constante num meio homogéneo. Como consequência, segundo este princípio, a luz desloca-se em linha recta num meio homogéneo.



A figura ao lado representa esquematicamente o percurso de um raio de luz desde o ponto P até ao ponto Q atravessando uma recta l que separa dois meios homogéneos de densidades diferentes uma da outra. Sejam v_1 a velocidade de propagação no meio que contém P e v_2 a correspondente velocidade no meio que contém Q. Designe-se por θ_1 e θ_2 os ângulos de incidência e de refracção, respectivamente.

Mostre que se aplicarmos o método dos multiplicadores de Lagrange ao problema de minimização do tempo, gasto pela luz na deslocação de P até Q, em função de θ_1 e θ_2, o(s) ponto(s) crítico(s) (θ_1, θ_2) obtido(s) obedecem à *Lei de Snell*:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

Nota: Na figura, a, b e d representam distâncias fixas; as únicas variáveis são θ_1 e θ_2.