Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**ANÁLISE MATEMÁTICA III** **2006/07**

**exame especial** Duração: 2h30

- **Este enunciado consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por $c_1$ a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por $c_2$ a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

---

## Parte 1

1. Considere a seguinte parametrização de uma curva $C$: $\vec{r}(t) = (t^2, t^4),\ t \in [-1, 1]$.
   (a) Determine a equação cartesiana de $C$, nas variáveis $x$ e $y$, esboce a curva e indique se existe orientação bem definida pela parametrização (em caso afirmativo, indique essa orientação).
   (b) Determine o vector velocidade de $\vec{r}(t)$ para $t = \frac{1}{2}$ e esboce-o colocando a origem na extremidade de $\vec{r}(\frac{1}{2})$.
   (c) Escreva o integral que permite calcular o comprimento do caminho percorrido pela parametrização e simplifique a expressão o mais possível (n.b.: não se exige que calcule o valor do integral).

2. Considere a função dada pela expressão $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$.
   (a) Calcule $f_x$, $f_y$ e a equação cartesiana do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1, 1, 4)$.
   (b) Determine os pontos de estacionaridade de $f$ e classifique-os (em termos de maximizante local, minimizante local, ponto de sela, etc.).

3. Considere a seguinte soma de integrais iterados:

$$\int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{3}\,y} x \; dx\, dy + \int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \; dx\, dy.$$

   (a) Esboce as duas regiões de integração dos correspondentes integrais duplos.
   (b) Considere uma nova região formada pela união das duas anteriores e observe que a soma dos integrais iterados dada em cima é o integral duplo da função $f(x, y) = x$ sobre essa nova região. Descreva agora tal integral duplo como um integral iterado do tipo I.
   (c) Calcule o valor do referido integral duplo (n.b.: não se exige que use a expressão a que chegou na alínea anterior; pode partir da soma de integrais iterados dada inicialmente em cima).

4. Considere o campo vectorial dado por $F(x,y) = (y,-x)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e a curva $C$ parametrizada por $\vec{r}(t) = \begin{cases} (t^2, t^4) & \text{se } t \in [-1,0] \\ (t^4, t^2) & \text{se } t \in [0,1] \end{cases}$.

   (a) Calcule, usando a definição, o trabalho realizado por $F$ sobre um objecto percorrendo a curva $C$ no sentido dado pela parametrização $\vec{r}$.

   (b) Calcule agora, usando um integral duplo, o trabalho referido na alínea anterior (sugestão: use o Teorema de Green).

**Parte 2**

5. Considere a superfície $S$ dada pelo gráfico da função $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$ no domínio definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.

   (a) Escreva um integral iterado que permita calcular a área dessa superfície e simplifique a expressão o mais possível (n.b.: não se exige que calcule o valor do integral).

   (b) Calcule o integral de linha de $F(x,y,z) = (z,y,-x)$ sobre a curva $C$ de $S$ dada por $\vec{r}(t) = \begin{cases} z = x^2 + 2xy + y^3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ e orientada positivamente (olhando para o referencial $x0y$).

6. Seja $f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0)$, ponto interior de $\mathrm{dom}(f)$. Seja $\vec{r} = (r_1, r_2) : \mathrm{dom}(\vec{r}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciável em $t_0$, ponto interior de $\mathrm{dom}(\vec{r})$, com $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0)$. Suponha que $f \circ \vec{r}$ faz sentido. Prove a regra de derivação das funções compostas para $\dfrac{d(f \circ \vec{r})}{dt}(t_0)$.

**FIM**

**Formulário**

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

T. Green: $\displaystyle\oint_{\partial R} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F \cdot d\vec{S} = \iiint_R (M_x + N_y + P_z)\,dxdydz$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_C F \cdot d\vec{\rho}$, onde $\nabla \times F = \mathrm{rot}F$

**Cotação:**

1.(a) 1,5; (b) 1; (c) 1   2.(a) 1,5; (b) 2,5   3.(a) 1,5; (b) 1,5; (c) 1   4.(a) 1,5; (b) 2; 5.(a) 1,5; (b) 2,5;   6. 4