Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

teste 2: *2ª chamada* Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

Parte 1

1. Considere o seguinte integral iterado:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{y^2-2}^{-y^2+2} \cos y \;\; dx\, dy.$$

   (a) Esboce a região R de integração do correspondente integral duplo.

   (b) Calcule tal integral duplo.

   (c) Descreva R como uma região de tipo I e escreva $\iint_R \cos y\, dxdy$ na forma de um integral iterado de tipo I.

2. Considere o sólido Q obtido pela rotação da região R da questão anterior em torno do eixo dos xx, isto é, a região Q do espaço $0xyz$ delimitada pelas superfícies $y^2 + z^2 = x + 2$ e $y^2 + z^2 = 2 - x$.

   (a) Determine a intersecção destas duas superfícies.

   (b) Partindo de um integral triplo, mostre que o volume de Q é 4π (Sugestão: considere Q como região de tipo II, isto é, considerando que é o x que varia entre valores de funções de y e z).

3. Considere a fronteira ∂R da região R do exercício 1, orientada no sentido positivo. Considere também o campo vectorial $F(x, y) = (2y, 1)$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\int_{\partial R} \|F(x, y)\|\, ds$.

   (b) Calcule $\int_{\partial R} F(x, y) \cdot d\vec{r}$.

Parte 2

4. Considere novamente o sólido Q da questão 2.

   (a) Calcule a área da superfície ∂Q (Sugestão: observe que metade desta superfície está no semi-espaço $x \geq 0$).

(b) Calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x,y,z) = (1, z, 2y)$ sobre um objecto percorrendo a circunferência $y^2+z^2 = 2 \wedge x = 0$ no sentido positivo (olhando para o referencial $y0z$).

5. Prove o seguinte caso particular do Teorema de Green (sem usar o Teorema de Green):

   Seja $R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \ \wedge \ y \in [f(x), g(x)]\}$ uma região de tipo I tal que f e g são de classe C^1 em $[a,b]$ e $f(x) < g(x)$, $\forall x \in]a,b[$. Se M é um campo escalar de classe C^1 num aberto contendo R, então

$$\oint_{\partial R} M\,dx \ = \ -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dxdy.$$

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$; $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$; $z = \rho\cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v \ = \ [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f \ = \ \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'$

integração de linha (fórmula fundamental): $\displaystyle\int_C \nabla U \cdot d\vec{r} \ = \ U(B) - U(A)$

T. Green: $\displaystyle\oint_{\partial R} M\,dx + N\,dy \ = \ \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F \cdot d\vec{S} \ = \ \iiint_R (M_x + N_y + P_z)\,dxdydz$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} \ = \ \int_C F \cdot \vec{\rho}$, onde $\nabla \times F = \mathrm{rot} F$

Cotação:

1.(a) 1; (b) 3; (c) 2; 2.(a) 1; (b) 3; 3.(a) 2; (b) 3; 4.(a) 2; (b) 2; 5. 4