Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA III **2006/07**

teste 2: *1^a chamada* Duração: 2h30

- **Este teste consta de duas partes e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário e a cotação. A soma das cotações das questões da primeira parte é 15 valores, mas o máximo que um aluno poderá ter com a resolução de questões dessa parte é 12 valores. Para conseguir ter mais do que 12 valores, o aluno deverá responder também às questões da segunda parte, a qual está cotada para 8 valores. Em suma, designando por c_1 a cotação que o aluno obtiver na primeira parte e por c_2 a cotação que obtiver na segunda parte, a sua cotação final será obtida através da expressão $\min\{c_1, 12\} + c_2$.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

Parte 1

1. Considere a região R do plano $x0y$ obtida pela intersecção dos círculos $x^2+y^2 \leq 1$ e $(x-1)^2+y^2 \leq 1$.

   (a) Esboce a região.

   (b) Mostre que a sua área vale $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (c) Considere a região do plano $x0y$ descrita em coordenadas polares por $r \in [0,1]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Trata-se de um subconjunto de R. Descreva em coordenadas polares as duas regiões que é necessário juntar a esta de modo a obter R.

2. Considere a região Q do espaço $0xyz$ obtida pela intersecção das esferas sólidas $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ e $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$. Suponha que a sua densidade é dada por $\mu(x,y,z) = x^2+y^2$.

   (a) Mostre que a intersecção das superfícies esféricas $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ é a circunferência $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$ situada na cota $z = \frac{1}{2}$.

   (b) Diga, justificando, o que representa fisicamente a expressão

   $$\iint_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}} \int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2+y^2 \, dz \, dxdy,$$

   onde o integral duplo está a ser calculado sobre o círculo definido pela inequação indicada.

   (c) Calcule a expressão a que se refere a alínea anterior.

3. Considere o campo vectorial dado por $F(x,y) = (y^2+2xy, x^2+2xy)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Diga, justificando, se F é ou não um campo conservativo e, em caso afirmativo, determine um seu potencial.

   (b) Calcule o trabalho realizado por F sobre um objecto percorrendo, no sentido positivo, o troço de ∂R (para R dado na questão 1) que está contido na circunferência $(x-1)^2+y^2 = 1$.

Parte 2

4. (a) Calcule a área da superfície S que limita superiormente o sólido Q considerado na questão 2, isto é, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para (x, y, z) satisfazendo adicionalmente as inequações $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$.

   (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (y^2 + 2xy, x^2 + 2xy, 0)$ através da superfície constituída pela fronteira ∂Q do sólido Q da questão 2, supondo esta superfície orientada de modo a os vectores normais apontarem para o exterior de Q.

5. Sejam $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ um campo conservativo contínuo sobre um aberto D de $\mathbb{R}^2$ e $U(x, y)$ um potencial de $F(x, y)$. Seja C uma curva em D de extremos A e B e $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, uma sua parametrização de classe C^1 tal que $\vec{r}\,'(t) \neq 0$, $\forall t \in]a, b[$, e $\vec{r}(a) = A$, $\vec{r}(b) = B$. Mostre que, nestas condições,

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

trigonometria: $\cos^2 z = \dfrac{1 + \cos(2z)}{2}$; $\sin^2 z = \dfrac{1 - \cos(2z)}{2}$

coordenadas esféricas: $x = \rho \cos\theta \sin\varphi$; $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$; $z = \rho \cos\varphi$

integração simples (partes; substituição): $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$; $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f \circ \phi)\, \phi'$

integração de linha (fórmula fundamental): $\displaystyle\int_C \nabla U \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$

T. Green: $\displaystyle\oint_{\partial R} M\, dx + N\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$

T. divergência: $\displaystyle\iint_{\partial R} F \cdot d\vec{S} = \iiint_R (M_x + N_y + P_z)\, dxdydz$

T. Stokes: $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_C F \cdot \vec{\rho}$, onde $\nabla \times F = \text{rot} F$

Cotação: 1.(a) 1; (b) 3; (c) 2; 2.(a) 1; (b) 2; (c) 3; 3.(a) 1; (b) 2; 4.(a) 2; (b) 3; 5. 3